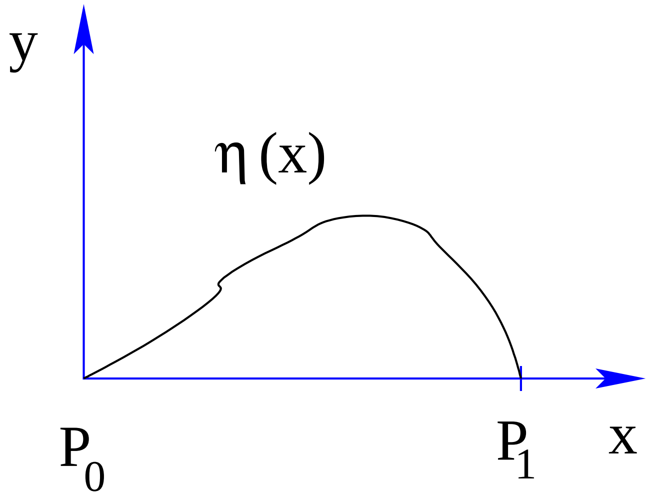

Abbildung 1.1: *Beispiel für einen Weg im Variationsverfahren*

1.5 Euler-Lagrangesche Variationsgleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns aus einem Grund, der erst etwas später deutlich werden wird, mit Variationsproblemen befassen. Wir werden dazu zunächst ein einfaches Beispiel betrachten, an dem wir die Problemstellung verdeutlichen wollen und das prinzipielle Vorgehen. In diesem Beispiel wollen wir verifizieren, dass die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten durch die Verbindungsgerade zwischen diesen Punkten gegeben ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass diese beiden Punkte in dre $x-y$ Ebene liegen und zwar, wie in der Abb. 1.5 skizziert P_1 am Koordinatenursprung, also $x_1 = y_1 = 0$, und P_2 mit den Koordinaten $x_2 = 1$, $y_2 = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass der kürzeste Verbindungsweg von P_1 nach P_2 durch die Verbindungsgerade gegeben ist, die ja durch die Funktion

$$y_0(x) = 0\,, \tag{1.80}$$

beschrieben wird. Dazu betrachten wir die Konkurrenz aller möglichen Funktionen, die durch die Punkte P_1 und P_2 gehen (siehe auch Abb. 1.5)

$$y_\alpha(x) = y_0(x) + \alpha\eta(x)\,. \tag{1.81}$$

Dabei ist α eine reelle Konstante und $\eta(x)$ eine beliebige Funktion mit

$$\eta(0) = \eta(1) = 0\,. \tag{1.82}$$

Wir werden dann zu zeigen haben, dass für jede dieser Funktionen $\eta(x)$ der Ansatz (1.81) den kürzesten Weg liefert, wenn $\alpha = 0$ ist. Nehmen wir also mal als Beispiel die Funktion

$$\eta(x) = x^2 - x\,, \tag{1.83}$$

die natürlich die Bedingung (1.82) erfüllt. Die Länge des Weges, der durch eine Funktion $y(x)$ definiert ist kann man berechnen durch das Integral

$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,. \tag{1.84}$$

Setzen wir nun in die Definition von $y_\alpha(x)$ in (1.81) die Funktion $\eta(x)$ aus (1.83) ein, so ergibt sich mit

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x - \alpha$$

für die Länge des Weges nach (1.84)

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \int_0^1 dx\,\sqrt{1+(2\alpha x-\alpha)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{2} + \frac{1}{4\alpha}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha}\right)\,. \end{aligned} \tag{1.85}$$

Die Berechnung dieses Integrals ist nicht trivial. Man kann sich dann davon überzeugen, dass diese Länge des Weges in der Tat minimal wird, wenn der Parameter α den Wert 0 annimmt. Damit haben wir also auf doch recht mühsame Weise gezeigt, dass alle Modifikationen des geraden Verbindungsweges für die spezielle Form $\eta(x)$ aus (1.83) nur zu einer Verlängerung des Weges führen. Wir können uns also jetzt eine andere Funktion $\eta(x)$, die (1.82) erfüllt ausdenken und die gleiche Prozedur wiederholen.

Man sieht natürlich schnell ein, dass dieses Verfahren, den kürzesten Verbindungsweg zu finden nicht sehr geeignet ist: man muss ja schliesslich alle möglichen Funktionen $\eta(x)$ untersuchen. Die Absicht dieses Beispiels war es auch nicht einen effizienten Algorithmus für ein solches Optimierungsverfahren vorzuführen, es sollte vielmehr dazu dienen, die folgenden Überlegungen durch dieses konkrete Beispiel zu veranschaulichen.

Wir werden deshalb eine andere Methode entwickeln um Variationsprobleme zu lösen vom Typ, dass die Funktion $y_\alpha(x)$ zu finden ist für die das Integral

$$J(y_\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} f(y_\alpha, y'_\alpha, x)\,dx\,, \tag{1.86}$$

ein Extremum ist. Wir sehen, dass das bereit diskutierte Beispiel von (1.84) einen Spezialfall darstellt, bei dem die Funktion unter dem Integral

$$f(y_\alpha, y'_\alpha, x) = \sqrt{1+\left(\frac{dy_\alpha}{dx}\right)^2}$$

nur von der Ableitung

$$y'_\alpha = \frac{dy_\alpha}{dx}$$

nicht aber von der Funktion selbst oder der Integrationsvariablen abhängt. Bei diesem Variationsverfahren sollen alle Funktionen $y_\alpha(x)$ berücksichtigt werden, die von der Form (1.81) sind mit

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\,, \tag{1.87}$$

die Werte der Funktion am Anfangs- und Endpunkt der Integration sollen also fest vorgegeben sein. Eine notwendige Bedingung dafür, dass $J(y_\alpha)$ ein Extremum ist, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha} = 0 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\alpha} f(y_\alpha, y'_\alpha, x)\,dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}\frac{\partial y'_\alpha}{\partial \alpha}\right)dx\,. \end{aligned} \tag{1.88}$$

Aus dem Ansatz (1.81) für die Funktionen $y_\alpha(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_\alpha}{\partial \alpha} &= \eta(x)\\ y'_\alpha(x) &= \frac{\partial y_0}{\partial x} + \alpha\frac{\partial \eta}{\partial x}\,,\\ \frac{\partial y'_\alpha}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta'(x)\,.\end{aligned} \tag{1.89}$$

Setzt man diese Ergebnisse in (1.88) ein, ergibt sich

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}\eta'\right)\,dx\,. \tag{1.90}$$

Den zweiten Summanden unter diesem Integral bearbeiten wir nun mit Hilfe der partiellen Integration

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}\frac{d\eta}{dx}\,dx = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}\eta\bigg|_{x_0}^{x_1}}_{=0} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}\eta\,dx\,.$$

Dabei ist der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung identisch null, da ja wegen (1.87) die Funktion η an den Grenzpunkten des Integrals verschwindet. Mit diesem Ergebnis ergibt sich aus (1.90)

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}\eta'\right)\eta(x)\,dx\,. \tag{1.91}$$

Dies muss für alle Funktionen $\eta(x)$ gelten, also insbesondere auch für Funktionen, die überall identisch null sind bis auf einen beliebigen Wert $\tilde{x}$ aus dem Integrationsintervall $[x_0, x_1]$. Das ist aber nur dann möglich, wenn für die gesuchte Funktion $y_\alpha = y$ gilt

die Euler-Lagrangesche Variationsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad \text{für alle}\, x \in [x_0, x_1]\,. \tag{1.92}$$

Als erste Anwendung betrachten wir den bereits oben diskutierten Fall mit

$$f(y, y', x) = \sqrt{1 + (y')^2}$$

Die Anwendung der Eulerschen Variationsgleichung liefert

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,.$$

Dies bedeutet, dass y' als Funktion von x eine Konstante ist, die wir mit a bezeichnen. Daraus ergibt sich

$$y' = a \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = ax + b\,.$$

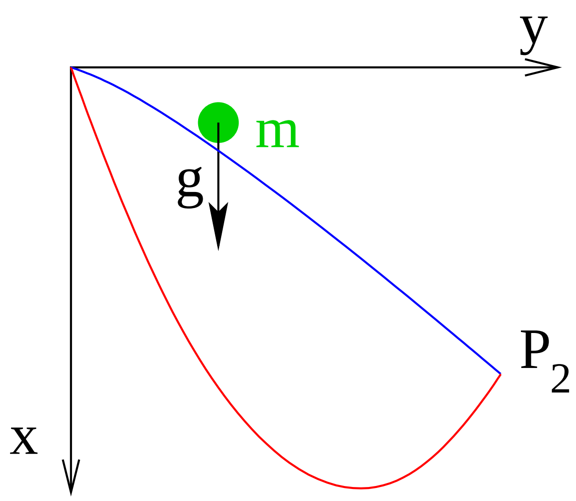

Abbildung 1.2: *Skizze zum Brachistochronen Problem*

Die Konstanten a und b müssen so gewählt werden, dass die Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ erfüllt werden, was natürlich zu der erwarteten Lösung (1.80) $y = 0$ führt.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass entsprechende Gleichungen auch gelten, wenn wir ein Variationsverfahren betrachten, in dem mehrere Funktionen $y_i(x)$ für $i = 1 \ldots n$ optimiert werden sollen. In diesem Fall haben wir also das Variationsproblem, dass wir die Funktionen $y_i(x)$ bestimmen wollen, die an den Grenzwerten fest vorgeben sind

$$y_i(x_0) = y_{i0} \qquad \text{und} \qquad y_i(x_1) = y_{i1} \qquad \text{für } i = 1 \ldots n\,, \tag{1.93}$$

und für die gilt, dass

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(y_1 \ldots y_n, y_1' \ldots y_n', x)\, dx\,, \tag{1.94}$$

ein Extremum ist. Dies führt zu n Euler-Lagrange Gleichungen vom Typ (1.92) der Form

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0\,. \tag{1.95}$$

Der Beweis erfolgt analog zu dem eindimensionalen Fall, wobei man unabhängige Variationen $\eta_i(x)$ für die einzelnen Funktionen betrachtet.

1.5.1 Brachistochronen Problem

Als weiteres Anwendungsbeispiel betrachten wir das Problem der Brachistochrone.[1] Dabei stellt man die Frage: Auf welcher Bahn y(x) gelangt ein reibungslos gleitender Massenpunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft am schnellsten von Punkt P_1 mit $(x_1, y_1) =$ (0,0) nach P_2 mit den Koordinaten (x_2, y_2)? (siehe auch Abb. 1.6). Dabei soll die Masse m ihren Weg mit der Startgeschwindigkeit $v = 0$ beginnen. Der obere der beiden in Abb. 1.6

[1]Der Name Brachistochrone hat seinen Ursprung in der griechischen Sprache und bedeutet so viel wie in kürzester Zeit

skizzierten Wege ist offensichtlich kürzer als der untere. Dafür wird die Masse aber auf dem unteren Weg durch die Beschleunigung g eine größere Geschwindigkeit erreichen. Die Frage ist also auf welchem Weg sind Weglänge und Geschwindigkeit so optimiert, dass die Zeit minimal wird.

Zur Beantwortung dieser Fragen berechnen wir die Zeit, die Masse m auf einem bestimmten Weg benötigt zu

$$J = \int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x)} dx\,. \tag{1.96}$$

Dabei haben wir die Differenzialform für die Zeit, dt, ersetzt durch den Quotient aus dem Wegelement ds und der aktuellen Geschwindigkeit v der Masse m. Bei der letzten Gleichung wurde ds entsprechend (1.84) substituiert.

Zur Bestimmung der jeweiligen Geschwindigkeit v betrachten wir die Energiebilanz der Masse m als Summe der jeweiligen kinetischen Energie und der potenziellen Energie im Schwerefeld der Erde

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - mgx = 0\,.$$

Wegen der Anfangsbedingung $v = 0$ und $x = 0$ ist diese Energie auf $E = 0$ normiert. Diese Gleichung kann nun aufgelöst werden nach

$$v(x) = \sqrt{2gx}\,.$$

Setzt man das Ergebnis in (1.96) ein so ergibt sich das zu minimierende Integral in der Form

$$J = \int_{0}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}} dx\,,$$

Der Integrand hängt also in diesem Fall von der Ableitung y' und der Variablen x ab, nicht aber von y

$$f(y', x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}\,. \tag{1.97}$$

Die Euler-Lagrange Gleichung (1.92) liefert also

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\,,$$

was bedeutet, dass die Ableitung $\partial f/\partial y'$ eine Konstante (unabhängig von x ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2g}\sqrt{2a}}\,, \tag{1.98}$$

wobei der letzte Ausdruck die Konstante ist, die wir hier etwas kompliziert definiert haben. Diese Gleichung können wir umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{y'^2}{(1+y'^2)x} &= \frac{1}{2a} \\ y'^2 &= \frac{x}{2a\left(1-\frac{x}{2a}\right)} = \frac{x^2}{2ax - x^2} \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} \end{aligned} \tag{1.99}$$

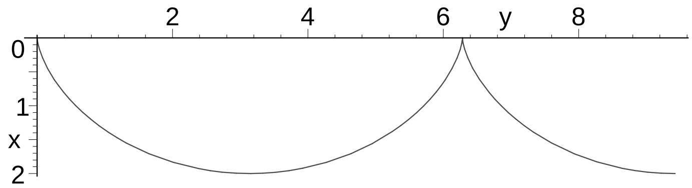

Abbildung 1.3: *Zykloide als Lösung des Brachistochronen Problems*

Diese letzte Gleichung können wir integrieren

$$\int_{P_1}^{P_2} dy = y(x_2) - y(0) = \int_0^{x_2} \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} dx \,.$$

Zur Berechnung des Integrals benutzen wir die folgende Sustitution

$$\begin{aligned} x &= a(1 - \cos\theta) \\ dx &= \frac{dx}{d\theta} d\theta = a \sin\theta \,, \end{aligned} \tag{1.100}$$

was uns führt auf

$$\begin{aligned} y &= \int_0^{\theta_2} \frac{a^2(1 - \cos\theta)\sin\theta}{\sqrt{(2a^2 - 2a^2\cos\theta - a^2(1 - \cos\theta)^2}} d\theta \\ &= \int_0^{\theta_2} a(1 - \cos\theta)\, d\theta \\ &= a\,(\theta - \sin\theta)\ . \end{aligned} \tag{1.101}$$

Die mit (1.100) und (1.101) parametrisierte Bahnkurve, die sogenannte Zykloide, ist in Abb. 1.7 für den Fall $a = 1$ dargestellt. Die Konstante a muss nun so gewählt werden, dass diese Bahnkurve den Endpunkt P_2 erreicht.