8 Spezielle Relativitätstheorie

Ausgearbeitet von Gaby Buhr und Günther Hasberg

Die Grundgleichungen in der Physik, wie z.B. das Newton'sche Gesetz, die Maxwell'schen Gleichungen oder dei Schrödingergleichung in der Quantenmechanik, sind Gesetze, die aufgrund von experimentellem Material postuliert wurden. Sie sind nur so lange "exakt" richtig, solange sie alle experimentellen Fakten enthalten. Wenn neue Experimente auftreten, müssen diese Gesetze geändert bzw. modifiziert werden. Auf diese Weise lässt sich ein allgemeineres Gesetz finden, welches als Grenzfall wiederum die bisherige Beziehung enthält. Die spezielle Relativitätstheorie, die A. Einstein 1905 formulierte, ist ein solches Beispiel.

Bei sehr großen Geschwindigkeiten, die der Lichtgeschwindigkeit nahe kommen, stimmen die Grundgleichungen der Mechanik nicht mehr mit den experimentellen Tatsachen überein. Durch eine Modifikation der Struktur dieser Gesetze lässt sich eine Übereinstimmung wieder erzielen, so dass sich im Grenzfall wieder die Newton'sche Mechanik ergibt.

Das Experiment, das der Newton'schen Mechanik widersprach, war der Michelson-Versuch, wo gezeigt wurde, dass die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem dieselbe ist.

8.1 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Ein System, in dem die Newton'schen Geetze gelten, heißt Inertialsystem.

Um die Bewegung des Körpers darin zu beschreiben, muss ein festes Bezugssystem vorgegeben werden (Ort, Zeit). Dieses Koordinatensystem kann zunächst beliebig gewählt werden, z.B. raumfestes System im starren Körper.

Dieses raumfeste Koordinatensystem ist per definitionem so beschaffen, dass in ihm die Newton'sche Bewegungsgleichung giltl

In einem körperfesten Koordinatensystem kommen noch zusätzliche Kräfte hinein, wie z.B. Zentrifugalkraft, Corioliskraft.

Theorem:

Hat man ein Inertialsystem gefunden, so sind alle dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegten System Inertialsysteme.

Der Übergang vom Koordinatensystem K und K' geschieht mit Hilfe der Galilei-Transformation.

<u>Galilei-Transformation:</u>

$$
\begin{aligned}
\vec{r'} &= \vec{r} - \vec{v} \cdot t \\
\dot{\vec{r'}} &= \dot{\vec{r}} - \vec{v} \\
\ddot{\vec{r'}} &= \ddot{\vec{r}} \quad \text{oder} \\
\vec{b'} &= \vec{b}
\end{aligned}
$$

Die Beschleunigung ist in beiden Systemen gleich, also gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung auch in K'. Damit ist das Theorem bewiesen.

Die Geschwindigkeiten von einem bevorzugten Bezugssystem und die des betrachteten Körpers sind additiv bezüglich eines ruhenden Systems. Daher ist auch die Lichtgeschwindigkeit in K und K' (und in verschiedenen Richtungen) verschieden.
Bis zur Jahrhundertwende hatte man angenommen, dass die Lichtgeschwindigkeit c ebenfalls der Beziehung $\dot{\vec{r'}} = \dot{\vec{r}} - \vec{v}$ unterliegt.

Dass dies jedoch nicht der Fall ist, bewies das Experiment von Michelson und Morley 1881 in Pasadena. Bis dahin glaubte man an einen sich im Weltraum befindenen Äther, der als elastisches Medium zur Fortpflanzung der transversalen elektromagnetischen Wellen diene.

Man ging bei dem Verscuh von dem Gedanken aus, dass es ein Koordinatensystem geben müsse, relativ zu dem der Äther sich in Ruhe befinde, also ein raumfestes Koordinatensystem. In diesem System müsste die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen dieselbe sein, was der Versuch beweisen sollte.

<u>Versuchsaufbau:</u>
eine Lichtquelle,
zwei Spiegel (einer in Richtung der Erdbewegung, der andere senkrecht dazu),
ein halbdurchlässiger Spiegel,

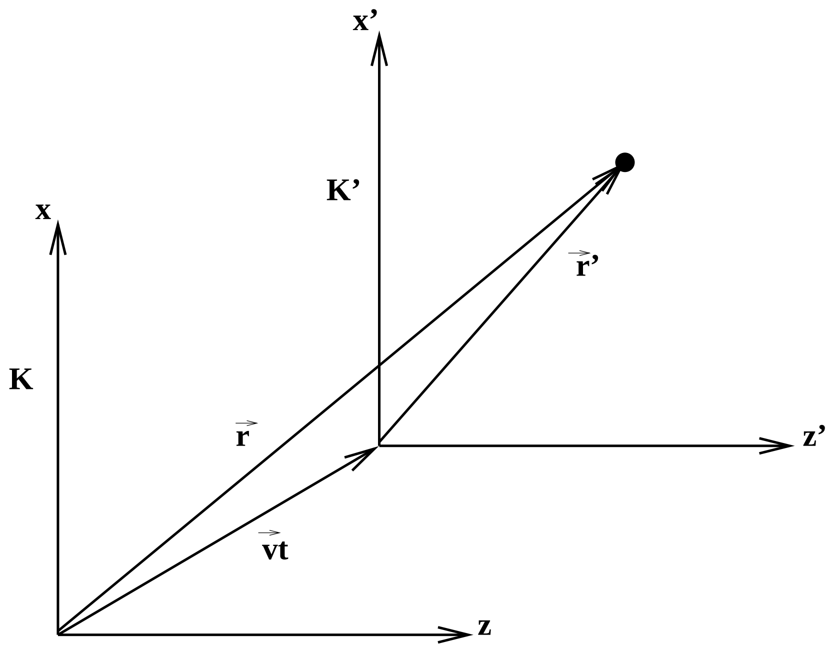

Abbildung 74:

ein Schirm,
aufgebaut auf einem rotierenden Tisch.

Michelson-Morley Experiment:
Da die Erde sich bewegt, sind die vom Licht zurückgelegte Strecken auf den beiden Wegen vom halbdurchlässigen Spiegel zu $Sp1$ und $Sp2$ verschieden:
$t_1 \neq t_2$:
t_1 = Zeit für den Weg zu $Sp1$ und zurück,
t_2 = Zeit für den Weg zu $Sp2$ und zurück.
Die Geschwindigkeit des Lichtes im Äther (ruhendes System) gleich c, im bewegten System (Erde) dagegen $c-v$ oder $c+v$, je nachdem ob die Bewegung mit oder entgegen der Strömung verläuft. Hieraus ergibt sich für t_1:

$$t_1 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Da $v << c$:

$$t_1 = \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

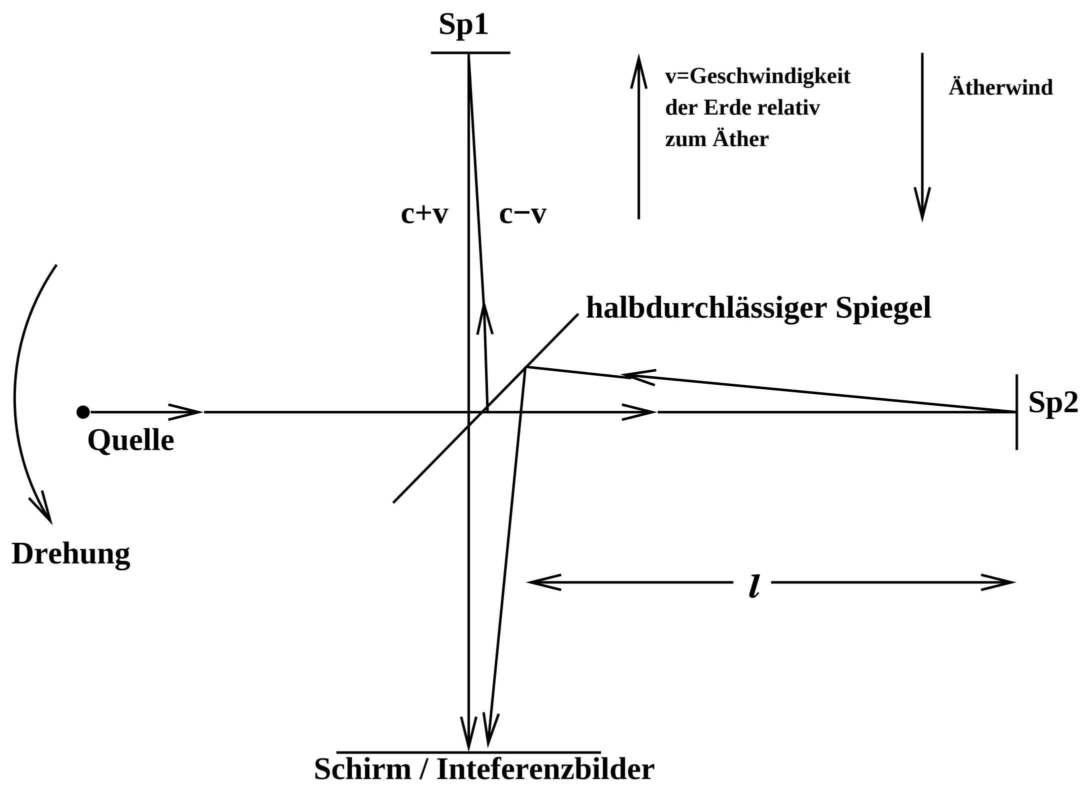

Abbildung 75:

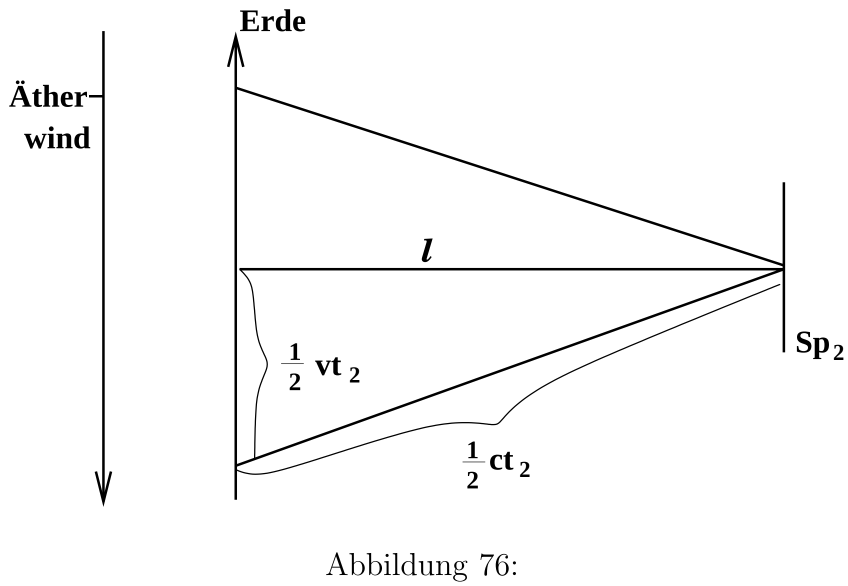

Abbildung 76:

Da sich die Erde in einem Zeitinterval von der Aussendung bis zum Empfang des Lichtes weiterbewegt hat, ergibt sich t_2 mit:

$$\frac{c^2 t_2^2}{4} = \ell^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4} \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dies entwickelt ergibt:

$$t_2 \approx \frac{2\ell}{c}\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\Big)$$

Hieraus ergibt sich der Zeitunterschied, der erwartet wurde:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{\ell}{c}\frac{v^2}{c^2}$$

Diese Zeitdifferenz müsste sich in einer Interferenzerscheinung auf dem Schirm zeigen, da sich hieraus sofort ein Unterschied in dem zeitlichen Auftreffen der Maxima und Minima auf dem Schirm ergibt. Durch die Rotation des Drehtisches müsste sich das Interferenzmuster ändern.

Die Rechnung zeigt, dass Δt zwar sehr klein ist, sich aber doch ein Unterschied zeigen müsste.

<u>Beispiel:</u>
$\ell = 30$ m
$v = 30$ km/sec
$c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec

$$\Delta t = \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{10}}\Big(\frac{3 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{10}}\Big)^2 = 10^{-15} sec$$

Vergleicht man damit die Wellenlänge des gelben Lichts (Natriumlampe)

$$\lambda = 6 \cdot 10^{-5}\, cm$$

ergibt sich für die Schwingungsdauer T:

$$T = \frac{1}{v} = \frac{\lambda}{c} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^{10}} = 2 \cdot 10^{-15}\, sec$$

Man sieht, dass sich Δt um den Faktor $\frac{1}{2}$ von T unterscheidet, also gerade um eine halbe Wellenlänge. Eine Veränderung hätte sichtbar sein müssen. Da dies jedoch nicht der Fall war, bedeutet das, dass die Lichtgeschwindigkeit immer eine Konstante ist, unabhängig vom Inertialsystem.

Experiment negativ: daher kein Äther, $c \equiv$ konstant

Die Erklärung dafür gab 1905 Einstein in seiner speziellen Relativitätstheorie. Betrachtet man eine Lichtquelle mit zwei verschiedenen Koordinatensystemen, so erscheint die Lichtaussendung immer als Kugelwelle. [Eine Schallwelle dagegen erscheint in einem System K', das sich mit v von K fortbewegt, als Ellipsoid (Doppler-Effekt).]

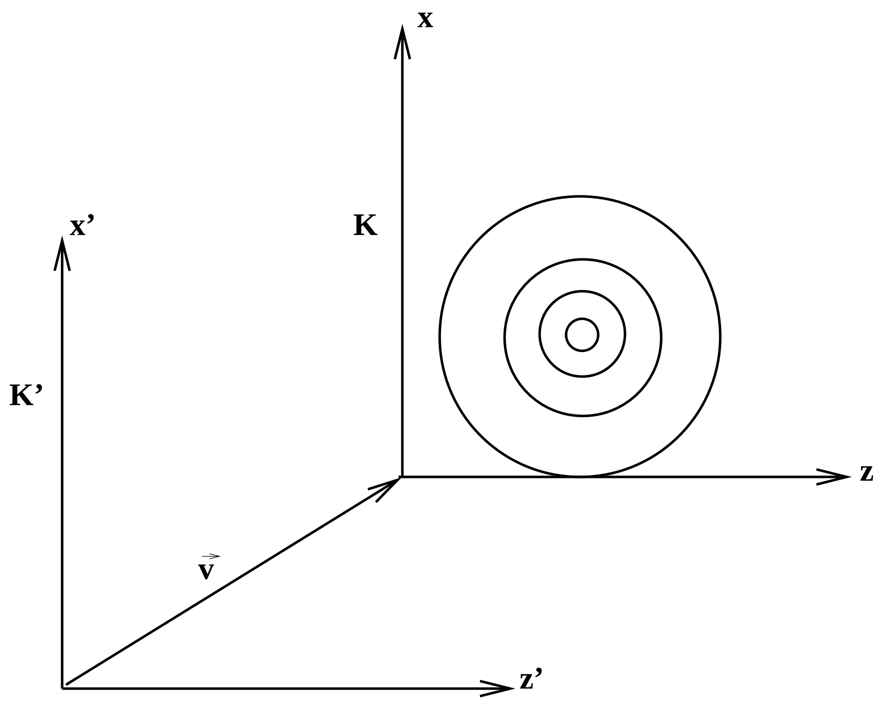

Abbildung 77:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \,\text{in}\, K \\
\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \,\text{in}\, K' \\
c & \quad \text{bleibt unveränder}
\end{aligned}
$$

Dies führt zu den Einstein'schen Postulaten (1905):

1. Relativitätsprinzip:
   Die Naturgesetze haben in jedem Inertialsystem die gleiche Form: Die Gleichungen, in denen die Naturgesetze ausgedrückt werden, sind invariant gegenüber einer Transformation der Koordinaten und der Zeit von einem System in ein anderes.

2. Die Lichtgeschwindigkeit:
   (Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung) ist in allen Inertialsystemen gleich c. (Vakuum vorausgesetzt)

Aus 1. folgt:
Ein Beobachter kann niemals durch irgendwelche Messungen herausfinden, ob ein System in Ruhe ist oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Lediglich die relative Geschwindigkeit gegeneinander kann gemessen werden.

Aus 2. folgt:
Die Galilei-Transformation gilt dafür nicht. Sie muss durch die Lorentz-Transformation ersetzt werden.

8.2 Lichtkegel und Eigenzeit

(Die mathematische Formulierung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.)
Ein Ereignis ist definiert durch den Ort, an dem es stattfindet, und dem Zeitpunkt. Ein auf ein punktförmiges Materieteilchen bezügliches Ereignis ist durch die drei Ortskoordinaten und einen Zeitwert definiert. Beobachtet man zwei Ereignisse - das Aussenden eines Lichtstrahls mit $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ und der Empfang desselben mit $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ - in zwei Bezugssystemen K und K', die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen, so ist der vier-dimensionale Abstand s_{12} folgenderweise definiert:

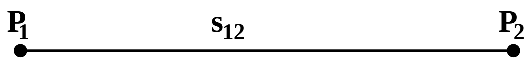

Abbildung 78:

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Andererseits ist der Zeitabstand:

$$= \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2} = c(t_2 - t_1)$$

Denn hier ist $c = v$, das ist aber gleich dem räumlichen Abstand:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad &\Rightarrow \\ \underbrace{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}_{\ell^2_{1,2}} - c^2\underbrace{(t_2-t_1)^2}_{t_{1,2}} = 0 \quad &= \quad -s^2_{12} \end{aligned}$$

Beobachtet man dieses Experiment von K' aus, so ist:

$$\begin{array}{ll} P'_1 & (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) \\ P'_2 & (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) \end{array}$$

Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, ergibt sich für K' dieselbe Rotation:

$$(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2-c^2(t'_2-t'_1)^2 = 0 = -s^{'2}_{12}$$

Der Abstand $s^2_{12} = s^{'2}_{12}$ ist invariant gegenüber einem Wechsel des Inertialsystems. Im Allgemeinen ist der Abstand jedoch ungleich Null, positiv oder negativ.

$$\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Betrachtet man den Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarten Ereignissen, so ergibt sich:

$$\begin{array}{rll} & P_1 & (x, y, z, t) \\ & P_2 & (x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) \\ \Rightarrow & ds^2_{12} & = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \end{array}$$

Hier ist ds das Linienelement im 4-dimensionalen Raum.

Behauptung:
Das 4-dimensionale Linienelement ist invariant bezüglich eines Übergangs von K nach K'.

$$ds^2 = ds^{'2}$$

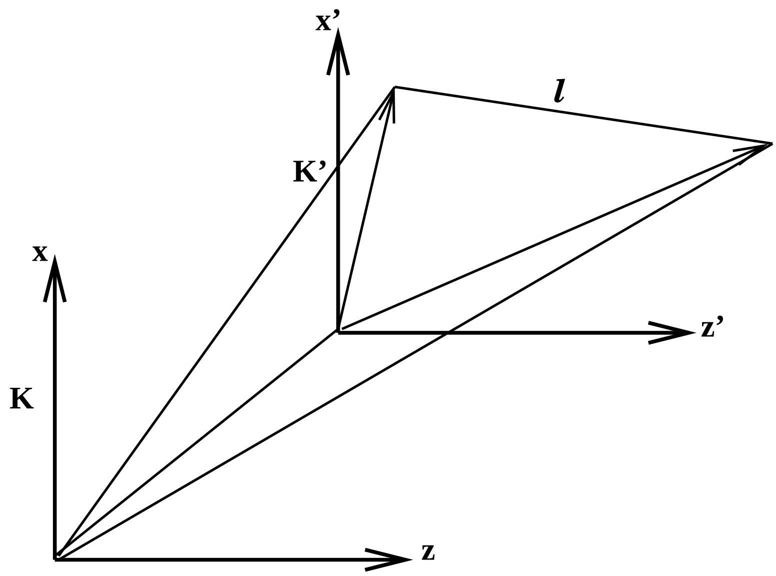

Abbildung 79:

Folgerung:
Da der endliche Abstand s_{12}^2 als Summe von $\sum ds^2$ aufgefasst werden kann, gilt:

$$s_{12}^2 = s_{12}^{'2}$$

d.h. der Abstand s_{12} ist eine invariante Größe in allen Inertialsystemen.

Beweis:
Da ds und ds' infinitesimale Größen derselben Ordnung sind, können sie mit einem Proportionalitätsfaktor a verknüpft werden.

$$ds^2 = ads^{'2}$$

a ist gesucht. Wegen der Homogenität des Raumes hängt der Abstand nicht von den Orts- und Zeitkoordinaten ab, sondern nur von der relativen Geschwindigkeit $\vec{v}$. Wegen der Isotropie des Raumes ist auch der Winkel $\frac{vecv}{|v|}$ ohne Einfluss, so dass

$$a = a(|v|)$$

Betrachten wir drei Systeme K, K_1, K_2 mit der Relativgeschwindigkeit V_1 zwischen $K - K_1$ und V_2 zwischen $K - K_2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= a(V_1) ds_1^2 \,\text{bzw.} \\ ds^2 &= a(V_2) ds_2^2 \end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen ds_1^2 und ds_2^2 ist:

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2$$

Aus dem Vergleich folgt:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12})$$

$\frac{a(V_2)}{a(V_1)}$ = unabhängig vom Winkel zwischen $\vec{V}_1$ und $\vec{V}_2$
$a(V_{12})$ = abhängig vom Winkel zwischen $\vec{V}_1$ und $\vec{V}_2$. D.h. a kann nicht von $\vec{V}$ abhängen.

Vergleich mit der Galilei-Transformation:
Es gibt keine Korrelation zwischen Raum und Zeit, sondern die Zeit ist absoblut, d.h. für beide Systeme eine Konstante.

$$\begin{aligned} dt'^2 &= dt^2 \\ d\tau^2 &= d\tau'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ \Rightarrow \ell^2 &= \ell'^2 \end{aligned}$$

Folgerungen aus der Invarianz des Abstandes:
Wegen der Invarianz des 4-dimensionalen Abstandes kann sich sowohl die Zeitdifferenz als auch der räumliche Abstand ändern beim Übergang von K zu K'. $(x_1, y_1, z_1, t_1)(x_2, y_2, z_2, t_2)$

1. Kann man ein Bezugssystem K' finden, in dem beide Ereignisse am selben Raumpunkt stattfinden?

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= t_{12} \quad \text{und} \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= \ell_{12}^2 \quad \text{und} \\ \ell'_{12} &= 0 \end{aligned}$$

(in K' finden beide Ereignisse am selben Raumpunkt statt)
Der Abstand in K:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2$$

Der Abstand in K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - \ell_{12}'^2$$

Wegen der Invarianz des Abstandes ist $s_{12}^2 = s_{12}'^2$:

$$\begin{aligned} s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 &= c^2 t_{12}'^2 > 0 \\ \Rightarrow t_{12}' &= \frac{s_{12}}{c} \neq 0 \end{aligned}$$

Man sucht also ein K', in dem $\ell_{12}'^2 = 0$ ist. Man kann diese Transformation nur durchführen, wenn der Abstand $s > 0$ ist. Einen solchen Abstand zwischen zwei Ereignissen nennt man zeitartig, und wegen seiner Invarianz können Ereignisse mit zeitartigem Abstand nie gleichzeitig stattfinden.

2. Gibt es ein Koordinatensystem K' mit dem Zeitabstand gleich Null, d.h. ein K mit $t_{12} \neq 0$ und ein dazu gehöriges K' mit $t_{12}' = 0$?

$$\Rightarrow s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = -\ell_{12}'^2 < 0$$

Bei einem Abstand kleiner Null spricht man von einem raumartigen(imaginären) Abstand. Es existiert ein Bezugssystem, in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind.

$$\ell_{12}' = \sqrt{\ell_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i s_{12}$$

Die bildliche Darstellung nennt man einen Lichtkegel.
4-dimensionale Darstellung:

$$c^2 t^2 - x^2 > 0$$

Ein Ereignis breitet sich also mit Lichtgeschwindigkeit aus.

$$
\begin{aligned}
x &= \pm ct \\
x^2 &= c^2t^2 - x^2
\end{aligned}
$$

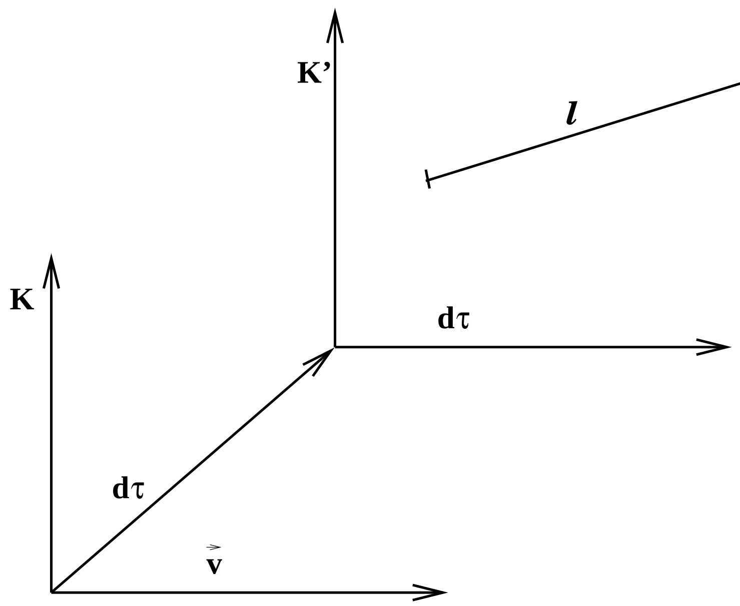

Abbildung 80:

Man hat drei Möglichkeiten für den Abstand:

- Ein Ereignis in B findet später statt als ein Ereignis im Ursprung 0.
- Ein Ereignis in A findet früher statt als ein Ereignis im Ursprung 0.

Es handelt sich in beiden Fällen um zeitartige Ereignisse, so dass wegen der Invarianz des Abstandes immer $t_{12} > 0$ ist.

- Bei einem Ereignis in C kann man nicht mehr sagen, ob es früher oder später als ein Ereignis in 0 stattfindet, da diese Ereignisse raumartig sind und daher t_{12} sowohl größer als auch kleiner als Null sein kann. "Früher" oder "später" hängt somit in diesem Fall vom Koordinatensystem ab. Also können solche Ereignisse prinzipiell nicht in einen kausalen Zusammenhang gebracht werden.

Zeitartige Ereignisse (in A oder B) können kausal miteinander verbunden werden, da der zeitliche Abstand als Ursache und Wirkung aufgefasst werden kann.

Definition der Eigenzeit:
Von einem raumfesten System K aus wird eine Uhr in einem bewegten System K' beobachet, das fest mit der Uhr verbunden ist, und somit ebenfalls ein Inertialsystem darstellt.

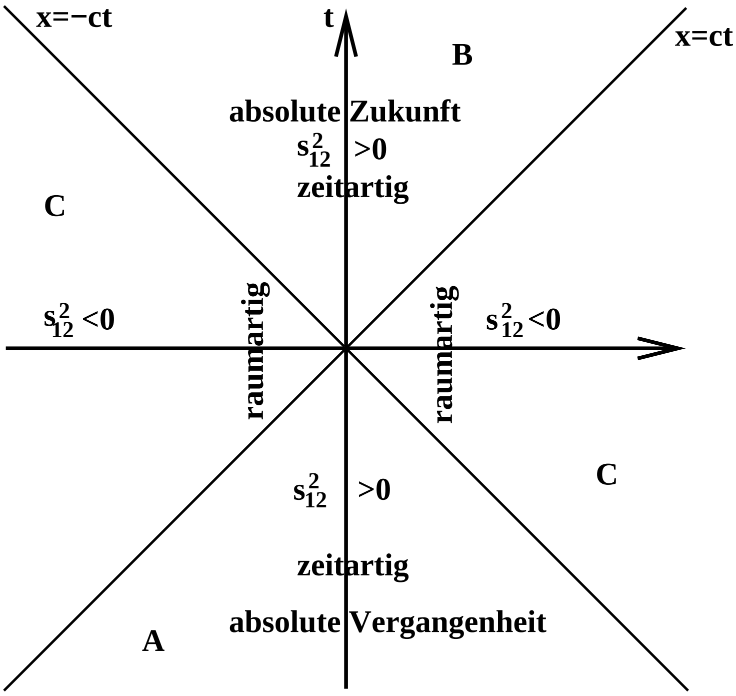

Abbildung 81:

Wird die bewegte Uhr von K aus mit einer ruhenden Uhr gemessen, so legt diese in der Zeit dt die Strecke $dx^2 + dy^2 + dz^2$ zurück. Die bewegte Uhr zeigt das Zeitinterval dt' an. Aus:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds'^2 \\ ds'^2 &= c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2dt'^2 \end{aligned}$$

($0 = -dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$: da die Uhr mit K' fest verbunden ist, erfolgt hier keine Änderung.) Es folgt:

$$
\begin{aligned}
dt' &= \frac{ds}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \\
dt' &= dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2c^2}} \\
\text{da}\,\frac{dx}{ct} &= v_x \\
\frac{dy}{dt} &= v_y \\
\frac{dz}{dt} &= v_z \\
\text{und}\, v^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\
\Rightarrow dt' &= dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}
$$

Durch Integration ergibt sich:

$$
t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}
$$

Dies nennt man die Zetidilatation. Das bedeutet für die Uhr in K', dass sie von K aus gesehen langsamer geht. dt' ist dann die Eigenzeit des Systems.

$$
dt' = \frac{ds}{c} \quad \text{invariant}
$$

Die Eigenzeit ist eine Invariante = Lorentz-Skalar.

Als Beispiel soll der Zerfall des Myons dienen.
Das Myon hat die Masse $m = 206\, m_e$ und die mittlere Lebensdauer $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}\, sec$. Es zerfällt in $e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. Es wird in der Ionosphähre in etwa 20 km Höhe durch die kosmische Höhenstrahlung erzeugt. Durch Photoplatten, die mit Hilfe von Ballons in die Ionosphähre gebracht wurden, konnte man nachweisen, dass ein Großteil der Myonen auf der Erdoberfläche auftreffen trotz augenscheinlich zu kurzer Lebenszeit.

Dieses Phänomen kann man sich mit der Zeitdilatation erklären. Welche Strecke würde ein Myon ohne diesen Umstand bewältigen?
Ist die ursprüngliche Anzahl der μ-Mesonen $= N_0$, so zerfällt dies nach

$N_0 e^{-t/\tau_0}$, $N_0 =$ Zahl der μ bei $t = 0$; für $t = \tau_0$ sind nur noch N_0/e Myonen vorhanden. Die dabei zurückgelegte Strecke beträgt:

$$\Delta h = c \cdot \tau_0 = 3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{sec} \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}\, sec = 660\, m$$

Diese Strecke reicht auf keinen Fall zum Auftreffen auf die Erde. Wegen der Zeitdilatation, die bei großen Geschwindigkeiten wirksam wird, gilt aber:

$$\Delta t^{Myon} = \Delta t^{Erde} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Eine Überschlagsrechnung ergibt für $v^2/c^2 = 0,99$.

$$\Delta t^{Erde} = 10 \Delta t^{Myon} \Rightarrow \Delta h = 6,6\, km$$

Es kann also doch ein erheblicher Teil der Myonen auf der Erde ankommen.

8.3 Die Lorentz-Transformation

Die beiden vorangegangenen Kapitel sollen nun mathematisch formuliert werden. Den Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem nennt man die Galilei-Transformation. Sie wird, aufgrund der Relativitätstheorie, ersetzt durch die Lorentz-Transformation.
In K zur Zeit $= t$ wird ein Lichtblitz ausgesandt, der sich in K als Kugelwelle ausbreitet.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ \Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \quad \text{Michelson-Versuch, c = const.)} \end{aligned}$$

Auch ein Beobachter in K' sieht de Lichtblitz als Kugelwelle. Der 4-dimensionale Abstand zwischen den beiden Ereignissen muss invariant sein.

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Der Abstand zwischen zwei Punkten bleibt bei Translation und Rotation konstant, wobei die Translation nur eine Verschiebung des Ursprungs bedeutet, für uns also ohne Interesse ist. Die gesuchte Transformation (Lorentz-Transformation) ist daher eine Drehung (orthogonale Transformation) im 4-dimensionalenMinkowski Raum. Anstelle der Zeitkoordinate führen wir eine vierte Komponente ein.

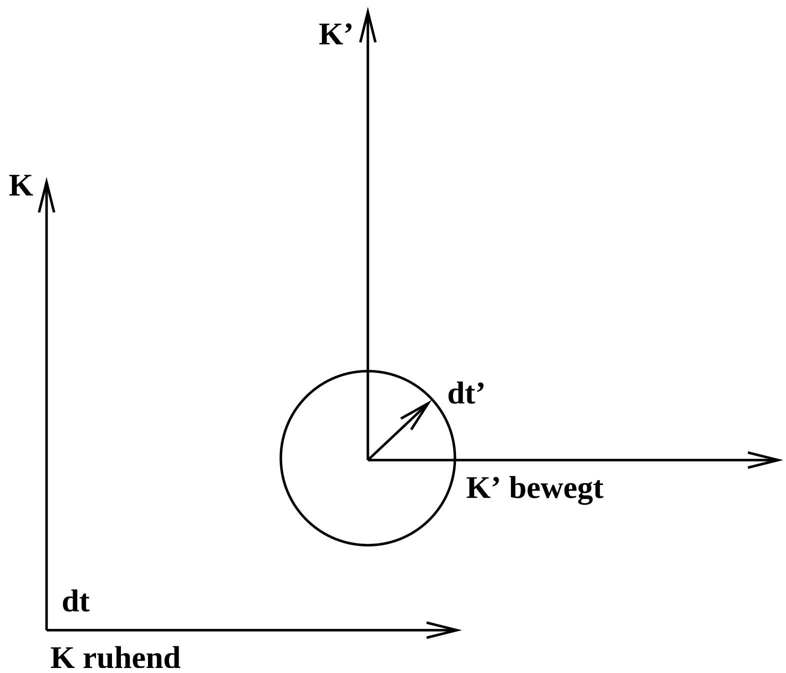

Abbildung 82: für $t = t' = 0$ fallen die Ursprünge von K und K' zusammen

$$\begin{aligned} x_4 &= ict \\ x_4' &= ict' \\ x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 &= \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu'^2 \end{aligned}$$

Wir können nun alle Formeln verwenden, die wir bei dem starren Körper für die 3-dimensionale Rotation kennengelernt haben.

$$x_\mu' = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu$$

Mit der Orthogonalitätsbedingung:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} &= \delta_{\mu\nu} \\
\sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} a^t_{\nu\lambda} &= \delta_{\mu\lambda} \\
a^t a = a a^t &= 1
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe einer räumlichen Transformation kann man $\vec{v} = \vec{v}_z$ erreichen. Gesucht ist die Transformation, die x_μ ind x'_μ überführt. Da alle Koordinaten außer z konstant sind, gilt:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= x_1 \\
x'_2 &= x_2 \\
z' &\neq z \\
t' &\neq t
\end{aligned}
$$

Transformationen, bei denen keine räumliche Rotation mehr enthalten ist, nennt man reine Lorentz-Transformationen.

$$
\Rightarrow x'_\mu = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \ddots & & \\ a_{31} & & \ddots & \\ a_{41} & & & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

Hier gibt es nur eine Kopplung zwischen x_3 und x_4:

$$
x'_\mu = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

Diese vier Größen, die die z- und die t-Achse verbinden, sind nun zu bestimmen. Die orthogonalen Reaktionen sind:

$$
\sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}
$$

Daraus ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_{33}^2 + a_{34}^2 &= 1 && (116)\\
a_{43}^2 + a_{44}^2 &= 1 && (117)\\
a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} &= 0 && (118)
\end{aligned}$$

Gesucht wird noch eine vierte Beziehung für die vierte Unbekannte; dazu wird der Ursprung 0 in K' betrachtet. Dort gilt:

$$x_3' = 0$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
x_3' &= a_{33}x_3 + a_{34}x_4\\
x_3 &= vt = \frac{icvt}{ic} = \frac{v}{ic} \cdot \underbrace{ict}_{x_4} = -i\frac{v}{c} \cdot ict\\
&= -i\beta x_4 \quad \text{mit}\, \beta = \frac{v}{c}
\end{aligned}$$

Für 0 in K' gilt daher:

$$\begin{aligned}
x_3' = a_{33}(-i\beta x_4) + a_{34}x_4 &= 0\\
\Rightarrow (-i\beta a_{33} + a_{34})x_4 &= 0\\
\Rightarrow a_{34} &= i\beta a_{33}
\end{aligned}$$

Damit ist das Gleichungssystem der vier Unbekannten vollständig bestimmt.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow a_{33}^2 + (i\beta a_{33})^2 &= a = a_{33}^2 - \beta^2 a_{33}^2\\
\Rightarrow a_{33} &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

Hierbei wird nur die positive 1 betrachtet, denn für $v << c$ ist $\beta = 0$ und der Gesamtausdruck dann $+1$. Für diesen Fall $v << c$ gilt wieder die Galilei-Transformation in den drei Ortskoordinaten mit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bei positiven Vorzeichen für $\beta \rightarrow 0$ erhält man die Einheitsmatrix und somit die eigentliche Lorentz-Transformation (Rotation). Negatives Vorzeichen bedeutet eine Spiegelung

$$x_3' \rightarrow -x_3$$

Daraus folgt:

$$Det\, A = +1$$

Die anderen Unbekannten ergeben sich jetzt zu:

$$\begin{aligned}
a_{34} &= \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
a_{43} = -a_{44}\frac{a_{34}}{a_{33}} &= -i\beta a_{44} = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
a_{44} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

Ein System, das sich entlang der z-Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat also folgende Transformationsmatrix:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

Die Anwendung der Lorentz-Transformation erfolgt nun dadurch, dass die Koordinaten des bewegten Systems durch die Koordinaten des ruhenden Systems ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y \\
z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
t' &= \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

Als Grenzfall $\frac{v}{c} \to 0 \Rightarrow \beta^2 = 0 \Rightarrow$ Galilei-Transformation.

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z - vt \\ t' &= t \end{aligned}$$

Die Umkehrtransformation, die die Koordinaten des unbewegten Systems die des bewegten Systems aus rückt, lautet:

$$x_\mu = \sum_\nu \tilde{a}_{\mu\nu} x'_\nu \quad \text{für } \vec{v} = -v_z$$

Vom gestrichen System aus, bewegt sich K mit $-v_z$. Daraus ergibt sich die Transformationsmatrix mit

$$\tilde{a}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^1}} \end{pmatrix}$$

Aus der Lorentz-Transformation ergeben sich vier wichtige Folgerungen:

1. Bei $v << c$ geht die Lorentz-Transformation über in die Galilei-Transformation mit $z' = z - vt$ und $t' = t$.

2. Seien zwei Ergebnisse gegeben mit

$$\begin{aligned} P_1(z_1, t_1 &= t) \\ P_2(z_2, t_2 &= t) \end{aligned}$$

die somit in K gleichzeitig sind. Vom gestrichenen System K' aus erscheinen sie als

$$\begin{aligned} P'_1(z'_1, t'_1) : t'_1 &= \frac{t - \frac{vz_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ P'_2(z'_2, t'_2) : t'_2 &= \frac{t - \frac{vz_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

Das heißt, dass zwei Ergebnisse, die in K gleichzeitig ablaufen, in K' nicht mehr gleichzeitig sind.

3. Lorentz-Kontraktion: Betrachtet man einen Stab in K, so ergibt sich für einen Beobachter in K':

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{z_1' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \\ z_2 &= \frac{z_2' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

Damit ist die Länge des Stabes

$$z_1 - z_2 = \ell = \frac{z_1' - z_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \ell\sqrt{1-\beta^2} = z_1' - z_2' < z_1 - z_2$$

Vom bewegten System aus betrachtet, ist der Stab verkürzt, seine Länge hat sich geändert.

4. Zeitdilatation: In K' wird am Ort x', y', z' eine Uhr betrachtet, deren Messung die Zeitdifferenz $\Delta t' = t_2' - t_1'$ ergibt. Führt man dieselbe Messung von K aus durch, so ist:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ t_1 &= \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} z'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t_2 &= \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} z'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \Rightarrow \Delta t &= t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \Delta t' &= \Delta t \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}$$

Die Uhr im bewegten System geht langsamer als eine Uhr im ruhenden System.

8.4 Vierervektoren

Wir haben gesehen, dass wir die Zeitkoordinate formal als 4. Komponente $x_4 = ict$ in einem 4-dimensionalen Raum auffassen können, neben den üblichen drei Raumkoordinaten.

Der Übergang von einem System K in ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes System K' wird als Drehung im 4-dimensionalen Raum beschrieben.

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu \\ x_\mu &= \sum_{\nu=1}^{4} a^t_{\mu\nu} x'_\nu \end{aligned}$$

Die x_μ fasst man als Komponenten eines Vektors im 4-dimensionalen Raum auf. Das Quadrat der Länge des Vektors $x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = \sum_\mu x_\mu^2$ ist invariant gegenüber der Drehung. Diesen Vektor nennt man "vierdimensionalenRadiusvektor".

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad x_4 = ict$$

Analog zum 3-dimensionalen Fall werden nun die Vierervektoren definiert.

Definition:
Die Gesamtheit von vier Größen A_1, A_2, A_3, A_4, die sich bei der Tranformation des 4-dimensionalen Koordinatensystems wie die Komponenten x_i ändern, nennt man Vierervektoren.

$$A'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu$$

Die ersten drei Komponenten nennt man die räumlichen, die vierte ist die zeitliche Komponente, die in der Regel imaginär ist.

Definition des Viererskalars:
Eine Größe Φ, die invariant ist unter der Lorentz-Transformation, nennt man einen Vierer- oder Lorentzskalar.

$$\sum_{\mu=1}^{4} A_\mu \cdot B_\mu = A \cdot B = \sum_{\mu=1}^{4} A'_\mu B'_\mu$$

Das Gleichheitszeichen gilt, da $A \cdot B$ ein Skalar ist und damit invariant.

Beweis:
Ersetzt man $A' \Rightarrow$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \sum_{\mu,\nu,\lambda} a_{\mu\nu} A_\nu \cdot a_{\mu\lambda} B_\lambda \\ &= \sum_{\nu,\lambda} \underbrace{\sum_{\mu=1}^{4} a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda}}_{\delta_{\nu\lambda}} A_\nu B_\lambda \\ &= \sum_\nu A_\nu \cdot B_\nu \quad \text{für } \lambda = \nu \end{aligned}$$

Beispiel:

$$s^2 = s'^2 = \sum_{\mu=1}^{4} s_\mu^2$$

ist invariant, da es ein Skalarprodukt ist. Auch die Eigenzeit ist ein Lorentz-Skalar, da sowohl ds als auch c Skalare sind.

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\beta^2}$$

In den folgenden Beispielen sollen lateinische Indizies für 3-dimensionale und griechische für 4-dimensionale Vektoren stehen.

8.5 Die Vierergeschwindigkeit

Der gewöhnliche 3-dimensionale Geschwindigkeitsvektor kann mit der Vierergeschwindigkeit $u_\mu = \frac{ds_\mu}{d\tau}$ mit $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ zu einem 4-dimensionalen Geschwindigkeitsvektor erweitert werden. Die Vierergeschwindigkeit ist auf jeden Fall ein Vierervektor, da bereits x_μ einer ist und die Eigenzeit $d\tau$ ein Skalar ist.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow u_1 &= \frac{v_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
u_2 &= \frac{v_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
u_3 &= \frac{v_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
u_4 &= \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}
$$

Im Grenzfall $\frac{v^2}{c^2} = \beta^2 \to 0$ erhalten wir aus den ersten drei Komponenten die 3-dimensionale Geschwindigkeit.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_\mu u_\mu^2 &= \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - c^2}{1 - v^2/c^2} \\
&= -c^2 \frac{1 - v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = -c^2 < 0
\end{aligned}
$$

Da die Norm des Vektors negativ ist, hat man hier einen zeitartigen Abstand.

8.6 Der 4-dimensionale Gradient

Definiert man den 4-dimensionalen Gradienten in Analogie zum 3-dimensionalen Gradienten $\vec{\nabla}$, so ist zu zeigen, dass die vier Operatoren

$$
\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \frac{\partial}{\partial x_4}
$$

der Definition des Vierervektors genügen und somit auch Vektoren sind. Dazu haben wir zu zeigen, dass sie sich wie die Ortskoordinaten transformieren beim Übergang von K nach K'.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x'_\mu} &= \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_v} \qquad \text{da}\, x_\nu = \sum_\lambda a^t_{\nu\lambda} x'_\lambda \\
\Rightarrow \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} &= a^t_{\nu\mu} \Rightarrow \sum_\nu a^t_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x'_\mu}
\end{aligned}
$$

Da $a^t_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \sum_{\nu=1} a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

Das ist die Definition für einen 4-dimensionalen Vektor. Im 3-dimensionalen Fall ergab sich aus dem Skalarprodukt des Gradienten $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator, also ein Skalar. Analog dazu erhält man im 4-dimensionalen Raum den Quadratoperator

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \Box^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Man nennt den Operator auch den D'Alembert'Operator.

Kovariante 4-dimensionale Formulierung:
(Kovarianz unter Lorentz-Transformation)

Definition der Kovarianz (klassische Mechanik)
Da im Raum keine Richtung ausgezeichnet ist, müssen alle Grundgesetze invariant sein gegenüber einer Rotation der räumlichen Koordinaten. Dies erfordert, dass die Gleichungen kovariant sind gegen 3-dimensionale orthogonale Transformationen, das heißt, dass die einzelnen Glieder eine Gleichung Tesoren vom selben Rang sind.

$E = T + U$ ist ein Skalar, bzw. Tensor vom Rang 0
$\vec{F} = m\vec{b}$ ist ein Vektor, bzw. Tensor vom Rang 1

Bei einer Rotation bleibt der Rang des Tensors erhalten. Bei Skalaren ist das ersichtlich, für einen Vektor gilt:

$$\vec{F} = m\vec{b} \quad \text{bzw.} \quad \vec{F'} = m\vec{b'}$$

Aus $f_i = mb_i \Rightarrow m \cdot b'_i$; Jede Komponente der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{b}$ ändert sich, aber auf beiden Seiten in derselben Weise. Deshalb gelten dieselben Beziehungen zwischen den transformierten Komponenten, wir für die ursprünglichen. Diese Eigenschaft nennen wir Kovarianz.

Die Gesetze der klassischen Mechanik waren kovariant gegenüber einer 3-dimensionalen Rotation. Da aber die Lorentz-Transformation ein übergeordnetes Gesetz darstellt, das als Grenzfall die Galilei-Transformation enthält, müssen alle Grundgesetze auch invariant gegenüber einer 4-dimensionalen Rotation sein beim Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes.

Ein Beispiel dafür ist die Wellengleichung.

Die Gleichung, die die Ausbreitung von Wellen aller Art beschreibt (Wasserwellen, elektromagnetische Wellen) lautet:

$$\begin{aligned} \Delta\psi \quad - \quad & \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 = \Box^2\psi \\ = \quad & \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)\psi = 0 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass ψ ein Lorentz-Skalar ist, erkennt man, dass die Wellengleichung invariant bei einer Lorentz-Transformation ist, da $\Box$ ein Lorentz-Skalar ist. Nicht Lorentz-invariant ist z.B. die Schrödingergleichung, da dort die Zeit nur einmal abgeleitet wird.

8.7 Relativistische Newton'sche Bewegungsgleichung

Man sucht nach einer Verallgemeinerung der Newton'schen Gleichungen, die invariant bei einer Lorentz-Transformation sind. In der Newton'schen Mechanik gilt:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{Skalar}}(m \underbrace{v_i}_{\text{Vektor}}) = F_i \quad i = 1,2,3$$

Für die Verallgemeinerung müssen wir fordern, dass für $v << c$ die räumlichen Komponenten sich zu der obigen Gleichung reduzieren. Man sucht eine Verallgemeinerung mit der Vierer-Geschwindigkeit $u_\mu \leftarrow \vec{v}$ und der Eigenzeit $\frac{d}{d\tau}$, die ein Lorentz-Skalar ist. Ansatz

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\mu) = \widetilde{F}_\mu \qquad \mu = 1,2,3,4$$

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_\mu, F_i \quad &= \quad \text{Minkowski-Kraft} \\ \text{für}\, v << c \Rightarrow \widetilde{F}_\mu \quad &\Rightarrow \quad F_i(i = 1,2,3) \end{aligned}$$

Bestimmung von $\widetilde{F}_\mu$:
Wir benötigen die relativistische Verallgemeinerung der drei räumlichen Kraftkomponenten und die vierte Komponente.

Definition:
Die Kraft (3-dimensional) ist die zeitliche Änderung des Impulses. Dies gilt für alle Inertialsysteme

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Im Allgemeinen ist hier $p_i \neq mv_i$. Durch Vergleich mit unserem relativistischen Vierer-Ansatz erhalten wir p_i und F_i. Für die ersten drei Komponenten erhalten wir:

$$\frac{d}{d\tau}(mu_\mu) = \widetilde{F}_\mu \to \frac{d}{dt}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = \widetilde{F}_i \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

Durch Vergleich ergibt sich für die Impulskomponenten und für die Minkowski-Kraft:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \widetilde{F}_i\sqrt{1-\beta^2} &= F_i \end{aligned}$$

Für kleine Geschwindigkeiten gehen diese Ausdrücke wieder in die alte Form über. Gesucht ist die vierte, die zeitliche Komponente von p_i und $\widetilde{F}_i$.

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{4} u_\mu \frac{d}{d\tau}(mu_\mu) &= \sum_\mu \frac{d}{d\tau}\left(\frac{m}{2}u_\mu^2\right) = \sum_\mu \widetilde{F}_\mu \cdot u_\mu \\ \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\frac{m}{2}\underbrace{\sum_{\mu=1}^{4} u_\mu^2}_{-c^2} &= 0 = \sum_\mu \widetilde{F}_\mu u_\mu \end{aligned}$$

Die zeitliche Ableitung der Konstanten c^2 verschwindet. Zusammen mit den Ergebnissen für $\widetilde{F}_i$ und u_μ folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{4} \widetilde{F}_\mu u_\mu = \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{1-\beta^2} + \frac{ic\widetilde{F}_4}{\sqrt{1-\beta^2}} &= 0 \\ \text{denn } \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{1-\beta^2} \text{ war } \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \widetilde{F}_4 &= \frac{i}{c}\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

Wird dies in den Ansatz für die Bewegungsgleichung eingesetzt, ergibt sich für die 4. Komponente der Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big)\frac{mic}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{i}{c}\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{d\tau}p_4 \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \vec{F}\cdot\vec{v}
\end{aligned}$$

Was bedeutet $\vec{F}\cdot\vec{v}$ für ein freies Teilchen? Für ein freies Teilchen ist die kinetische Energie gleich der Gesamtenergie.

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = m\cdot\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\frac{m}{2}v^2 = \frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}E$$

Oben eingesetzt ergibt:

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt}E$$

und durch Integration

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Damit ergibt sich die 4. Komponente P_4, der relativistische Impuls:

$$\begin{aligned}
p_4 &= \frac{iE}{c} \\
\Rightarrow p_4 &= \Big(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}};\frac{iE}{c}\Big)
\end{aligned}$$

Bisher haben sich alle relativistischen Größen für den Fall $v << c$ auf die entsprechenden Größen der klassischen Mechanik reduziert. Entwickelt man die Wurzel, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \\
\Rightarrow \qquad & E \to mc^2+\frac{1}{2}mc^2\cdot\frac{v^2}{c^2} = mc^2\Big(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\Big) \\
&= mc^2+\frac{1}{2}mv^2
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Energie eines Teilchens, wenn $v \to 0$ geht, nicht null wird, sondern mc^2, die Ruheenergie, noch erhalten bleibt:

$$E_0 = mc^2$$

Die Anwendung dieser Formel ist vielfältig, z.B. vernichten sich Elektronen und Positronen unter Aussendung von γ-Strahlen, und umgekehrt ist es möglich, aus Energie Masse zu gewinnen (Paarerzeugung, Paarvernichtung, Atombombe, Atomreaktor). Mit Hilfe des relativistischen Impulses ergibt sich der relativistische Energiesatz:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{4} p_\mu \cdot p_\mu &= m^2 \sum_{\mu=1}^{4} u_\mu \cdot u_\mu = -m^2c^2 = \vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} \\ \Rightarrow E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4 \end{aligned}$$

8.8 Lagrange- und Hamilton-Funktion in der relativistischen Mechanik

In diesem Abschnitt wollen wir die in der relativistischen Mechanik gültigen Lagrange- und Hamilton-Funktionen herleiten. Wir gehen von der relativistischen Bewegungsgleichung aus.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_i &= F_i \\ i &= 1, 2, 3 \quad \text{mit}\, p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} &= F_i = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Die Kräfte sollen von einem Potential ableitbar sein, das nur von $\vec{r}$ abhängt. Man sucht nun eine Funktion L, für die die Euler-Lagrange-Gleichungen, die aus dem Variationsprinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

folgen, mit den obigen Bewegungsgleichungen übereinstimmen.

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial v-i}\Big)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \qquad \text{sollen übereinstimmen}(i=1,2,3)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}-F_i=0 \qquad \text{sollen übereinstimmen}(i=1,2,3)$$

Durch Vergleich und Integration folgen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} &= -mc^2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot(-2)\frac{v_i}{c^2}=\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \Rightarrow L &= -mc^2\sqrt{1-\beta^2}-V(\vec{r})\end{aligned}$$

Bei der Hamilton-Funktion müssen die Geschwindigkeiten durch die Impulse ersetzt werden.

$$\begin{aligned}H=E &= \sum_{i=1}^{3}\dot{q}_i p_i - L\,\text{mit}\,p_i=\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \dot{q}_i\equiv v_i\\ \Rightarrow H &= \sum_{i=1}^{3}\frac{v_i\cdot m\cdot v_i}{\sqrt{1-\beta^2}}+\underbrace{mc^2\sqrt{1-\beta^2}+V(\vec{r})}_{=-L}\\ \Rightarrow H &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+V(\vec{r})\end{aligned}$$

Wird $\vec{v}$ durch $\vec{p}$ ersetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ \frac{p^2}{c^2} &= \frac{m^2v^2/c^2}{1-v^2/c^2}\\ \Rightarrow &\quad \frac{p^2}{c^2}-\frac{p^2}{c^2}\cdot v^2/c^2=m^2v^2/c^2\\ \frac{p^2}{c^2} &= \frac{v^2}{c^2}\Big(m^2+\frac{p^2}{c^2}\Big)\\ \frac{v^2}{c^2} &= \frac{p^2/c^2}{m^2+p^2/c^2}\\ \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} &= \frac{p^2}{m^2c^2+p^2}\end{aligned}$$

Eingesetzt in H ergibt:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{m^2c^2+p^2}}} + V = \frac{mc^2\sqrt{m^2c^2+p^2}}{\sqrt{m^2c^2+p^2-p^2}} + V \\
H &= c\sqrt{m^2c^2+p^2} + V(\vec{r})
\end{aligned}$$

Für $v << c$ ergibt sich bei der Wurzelentwicklung wieder der klassische Fall bis auf die Ruheenergie.

$$\begin{aligned}
H &= mc^2\Big(1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}\Big) + V(\vec{r}) \\
&= mc^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + V(\vec{r})
\end{aligned}$$

Aus der Beziehung für Impuls und Energie folgt eine weitere wichtige Beziehung durch Erweitern von $\vec{p}$ mit c^2:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{c^2 m\vec{v}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \\
E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
\Rightarrow \vec{p} &= \frac{E\cdot\vec{v}}{c^2}
\end{aligned}$$

In den ersten beiden Gleichungen sieht man, dass für $v \to c$ die Größen p und $E \to \infty$, d.h. ein Teilchen mit endlicher Ruhemasse kann sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. In der Formel $p = \frac{E\cdot v}{c^2}$ tritt die Masse nicht mehrexplizit auf, das bedeutet, dass es keine Beschränkung auf Teilchen mit endlicher Masse gibt. Ist die Ruhemasse $= 0$, so kann ein solches masseloses Teilchen mit c fliegen (Photonen). Dafür gilt:

$$\begin{aligned}
m &= 0 \\
|\vec{v}| &= c
\end{aligned}$$

Betrag des Impulses:

$$p = \frac{E}{c}$$