7 Die Hamilton-Jacobi-Theorie

Ausgearbeitet von Rolf Horn und Bernhard Schmitz

7.1 Einleitung

Um die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_k}\end{aligned}$$

zu vereinfachen, führten wir die kanonischen Transformationen ein. Durch diese wurden die alten Orte und Impulse durch neue Orte und neue Impulse ausgedrückt, derart dass

$$\begin{aligned}p_k &= p_k(\alpha,\beta) \quad \text{und} \\ q_k &= q_k(\alpha,\beta) \quad \text{und} \\ H(p,q) &\rightarrow H(p(\alpha,\beta),q(\alpha,\beta)) \rightarrow \bar{H}(\alpha,\beta) \quad \text{mit} \\ -\frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial \beta_k} &= \dot{\alpha}_k \quad \text{und} \\ \frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial \alpha_k} &= \dot{\beta}_k\end{aligned}$$

Ziel dieses Kapitels ist es, zu der alten Hamiltonfunktion, die von den alten Orten und alten Impulsen abhängt, eine erzeugende Funktion $S(q,\alpha)$ zu konstruieren, die sie in eine neue Hamiltonfunktion, die nur noch von den neuen Impulsen abhängen soll, kanonisch transformiert, d.h.

$$H(p(\alpha,\beta),q(\alpha,\beta)) = \bar{H}(\alpha)$$

7.2 Die Hamilton-Jacobi-Theorie für nicht explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion

Für dieses $\bar{H}(\alpha)$ muss dann gelten

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_k = -\frac{\partial H(\alpha)}{\partial \beta_k} &= 0 \Rightarrow \alpha_k = const. \\
\dot{\beta}_k = \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha_k} &= const. = \gamma_k \quad \text{nur Fkt. von}\, \alpha_i \\
\Rightarrow \beta_k &= \gamma_k t + \delta_k \\
\text{wobei}\, \delta_k &= const.
\end{aligned}
$$

Finden wir also die erzeugende Funktion $S(q, \alpha)$, die $H(p, q)$ auf $\bar{H}(\alpha)$ transformiert, so sind die neuen Impulse Konstanten der Bewegung; die neuen Orte ändern sich nur linear mit der Zeit ("kräftefreie" Bewegung). Wir suchen nun die erzeugende Funktion $S(q, \alpha)$. Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir, dass für $S(q, \alpha)$ [zeitunabhängig] gelten muss:

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{\partial S(q, \alpha)}{\partial q_k} \\
\beta_k &= \frac{\partial S(q, \alpha)}{\partial \alpha_k}
\end{aligned}
$$

Einsetzen führt dann zu

$$
H(p, q) \;\Rightarrow\; H\Big(\frac{\partial S(q, \alpha)}{\partial q_k}, q_k\Big) = \bar{H}(\alpha_k) = E(\alpha_k)
$$

Dies ist die Hamilton-Jacobi-(Differential)Gleichung für den zeitunabhängigen Fall. Aus dieser Differentialgleichung lässt sich dann $S(q, \alpha)$ bestimmen.

Die physikalische Bedeutung von S:

Wir bilden die totale Ableitung von der Zeit von S. Es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}S(q,\alpha) &= \sum_{k=1}^{s}\left\{\frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\dot{\alpha}_k\right\} \\
&= \sum_{k=1}(p_k\dot{q}_k + \beta_k\dot{\alpha}_k) \\
(\text{und wegen}\, \dot{\alpha}_k = 0) &= \sum_{k=1}^{s} p_k\dot{q}_k \\
&= \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \\
&= \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T
\end{aligned}
$$

Integration über die Zeit liefert dann

$$
S = \int_{t_1}^{t_2} 2T\, dt = W
$$

Es ist also $S(q,\alpha)$ identisch mit dem Wirkungsintegral.

7.3 Die Hamilton-Jacobi-Theorie für explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion

Es gilt

$$
E = H(p,q,t)
$$

Sei

$$
\begin{aligned}
p_0 &\equiv -E \\
q_0 &\equiv t
\end{aligned}
$$

Wir definieren nun

$$
\kappa = H(p_k, q_k, q_0) + p_0 = 0
$$

In diesem Fall suchen wir nun eine erzeugende Funktion S, die auch von den Koordinaten mit dem Index 0 abhängt.

$$S(q_{k>0}, \alpha_{k>0}, p_0, \alpha_0) \Rightarrow S(q_k, \alpha_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, s)$$

Wegen

$$\frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_k} = p_k \quad (k = 0, 1, \ldots, s)$$

und Einsetzen in κ folgt

$$\begin{aligned} H\Big(\frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_{k>0}}, q_{k>0}, q_0\Big) + \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_0} &= 0 \quad \text{oder} \\ H\Big(\frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_{k>0}}, q_{k>0}, t\Big) + \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist die Hamilton-Jacobi-(Differential)Gleichung für den zeitabhängigen Fall.

Die physikalische Bedeutung von $S(q_{k>0}, \alpha_{k>0}, t, \alpha_0)$:
Hierzu bilden wir das totale Differential von S nach der Zeit. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S(q,\alpha) &= \sum_{k=0}^{s} \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial \alpha_k}\dot{\alpha}_k + \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_k}\dot{q}_k \\ (\text{wegen}\, \dot{\alpha}_k = 0) &= \sum_{k=0}^{s} \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_k}\dot{q}_k \\ &= \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial q_0} \\ &= \sum_{k=1}^{s} p_k\dot{q}_k + \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial t} \\ &= 2T + p_0 \\ (\text{wegen}\, p_0 = -E = -H) &= 2T - H \\ (\text{wegen}\, H = T + U) &= 2T - T - U \\ &= T - U = L \end{aligned}$$

Es ist also die totale Ableitung von $S(q_{k>0}, \alpha_{k>0}, t, \alpha_0)$ identisch mit der Lagrange-Funktion. Integration über die Zeit liefert dann die Wirkung S:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$

7.4 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung als Grenzfall der Schrödingergleichung in der Quantenmechanik

Für ein Teilchen im Raum mit der potentiellen Energie $U(q)$ und dem Impuls p lautet die Hamiltonfunktion wegen $E = H$

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

In der Quantenmechanik geht in Cartesischen Koordinaten der generalisierte Impuls p über in

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

Einsetzen in $H(p, q)$ führt zu

$$\Bigg[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + U(q)|\psi(q) = E\psi(q) \tag{101}$$

Dies ist eine Differentialgleichung zur Bestimmung von $\psi(q)$. Substitution $\psi = e^{iS/\hbar}$ (S von q abhängig)! Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial q^2} e^{is/\hbar} &= \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial q} e^{iS/\hbar}\right) \\ &= \frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} e^{iS/\hbar} - \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 e^{iS/\hbar} \end{aligned}$$

Einsetzen in (101) und Division durch $e^{iS/\hbar}$ führt dann zu

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + U(q) = E \tag{102}$$

Führt man nun den Grenzübergang zur klassischen Physik durch ($\hbar \to 0$), so geht (102) in

$$\frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial S}{\partial q}\Big)^2 + U(q) = E$$

die Hamilton-Jacobi-(Differential)Gleichung über.

Der Grenzübergang klassische Mechanik zur Quantenmechanik geht nicht, da die klassische Mechanik zwar ein Grenzfall der Quantenmechanik ist ($\hbar \to 0$), aber nicht umgekehrt!

7.5 Beispiele zur Hamilton-Jacobi-Theorie (zeitunabhängig)

a) Der 1-dimensionale harmonische Oszillator:
Zunächst diskutieren wir den 1-dimensionalen Fall mit beliebigem Potential $U(q)$. Somit gilt für die Hamiltonfunktion

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

und damit lautet die Hamilton-Jacobigleichung

$$\frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q}\Big)^2 + U(q) = E$$

Beim 1-dimensionalen Oszillator ist E die einzige Konstante der Bewegung. Da α (der neue Impuls) ebenfalls Konstante der Bewegung sein muss, setzen wir

$$\alpha \equiv E$$

(Beim zeitunabhängigen Fall lässt isch immer ein α_k gleich E setzen.) Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q}\Big)^2 + 2mU(q) &= 2m\alpha \\ \Rightarrow (102) \quad S(q,\alpha) &= \int_{q_0}^{q} \sqrt{2m(\alpha - U(\tilde{q}))d\tilde{q}}\end{aligned}$$

Da $\beta = \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial \alpha}$ folgt hieraus

$$(102) \qquad \beta = \int_{q_0}^{q} \frac{m}{\sqrt{2m(\alpha - U(\tilde{q}))}} d\tilde{q}$$

Wegen der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ist aber auch

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{\partial \bar{H}(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial E}{\partial \alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} = 1 \\ \Rightarrow \beta &= t - t_0 \end{aligned} \tag{103}$$

Unser Ziel ist es nun, die neuen Koordinaten in die alten Koordinaten zurück zu transformieren, damit wir die Bewegung in $p(t)$ und $q(t)$ darstellen können.

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q} \\ \text{(wegen 1)} &= \sqrt{2m(\alpha - U(q))} = \sqrt{2m(E - U(q))} \end{aligned} \tag{104}$$

Aus (102) und (103) folgt

$$t - t_0 = \int_{q_0}^{q} \frac{m}{\sqrt{2m(E - u(\tilde{q}))}} d\tilde{q} \tag{105}$$

Um diesen Ausdruck näher zu bestimmen, gehen wir nun zu dem speziellen Fall des harmonischen Oszillators mit $U(q) = \frac{1}{2}\alpha q^2$ über und erhalten aus

$$\begin{aligned} &(104) \qquad p(t) = \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}\alpha q^2)} \quad \text{und aus} \\ &(105) \qquad t - t_0 = \int_{q_0}^{q} \frac{m}{\sqrt{2m(E - \frac{1}{2}\alpha \tilde{q}^2)}} d\tilde{q} \end{aligned}$$

Ausführung des Integrals führt zu

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{a}}\, arc\, \sin \sqrt{\frac{a}{2E}}\, q$$

und somit

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{a}}\, \sin \sqrt{\frac{a}{m}}\, (t - t_0)$$

und damit

$$p(t) = \sqrt{2mE}\, \cos \sqrt{\frac{a}{m}}\, (t - t_0)$$

Dies ist die wohlbekannte Lösung des harmonischen Oszillators.

b) Der 3-dimensionale anisotrope harmonische Oszillator
Hier ergibt sich die Hamilton-Funktion zu

$$\begin{aligned} H(p,q) &= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{a_i}{2} q_i^2 \right) \\ \text{mit} \quad p_i &= \frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q_i} \end{aligned}$$

führt dies zur Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2 + m a_i q_i^2 \right\} = 2mE(\alpha_i)$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, machen wir folgenden Separationssatz

$$S(q_1, q_2, q_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = S_1(q_1, \alpha) + S_2(q_2, \alpha) + S_3(q_3, \alpha)$$

Einsetzen in die Hamilton-Jacobi-Gleichung führt dann zu

$$\sum_{i=1}^{3}\left[\Big(\frac{\partial S_i(q_i,\alpha)}{\partial q_i}\Big)^2 + m\alpha_i q_i^2\right] = 2mE(\alpha_i)$$

Da die Funktionen $S_i(q_i)$ von verschiedenen Variablen abhängen, müssen die einzelnen Summanden konstant sein:

$$\Big(\frac{\partial S_i(q_i,\alpha)}{\partial q_i}\Big) + m\alpha_i q_i^2$$

Setze daher

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_i(q_i,\alpha)}{\partial q_i} + m\alpha_i q_i^2 &= 2m\alpha_i \\
\text{mit} \quad E &= \sum_{i=1}^{3}\alpha_i
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir drei unabhängige lineare Oszillatoren und wegen Beispiel (a) somit die Lösungen:

$$\begin{aligned}
q_i(t) &= \sqrt{\frac{2\alpha_i}{a_i}}\,\sin\sqrt{\frac{a_i}{m}}\,(t-t_0) \\
p_i(t) &= \sqrt{2m\alpha_i}\,\cos\sqrt{\frac{a_i}{m}}\,(t-t_0) \\
(i &= 1,2,3)
\end{aligned}$$

c) <u>Teilchen im homogenen Schwerefeld:</u>
Gegeben: homogenes Schwerefeld in negativer z-Richtung mit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{für } t = t_0 \text{ und} \\
p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{pmatrix} \quad \text{für } t = t_0
\end{aligned}$$

Für die Hamiltonfunktion ergibt sich

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz$$

wegen

$$p_x = \frac{\partial S(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x} \qquad \text{(für } p_y, p_z \text{ analog)}$$

ergibt sich die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung zu

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + 2m^2 gz = 2mE(\alpha)$$

Diese Differentialgleichung versuchen wir wieder durch einen Separationssatz zu lösen. Es sei

$$S = S_1(x) + S_2(y) + S_3(z)$$

so folgt

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_3}{\partial z}\right)^2 + 2m^2 gz = 2mE(\alpha) \tag{106}$$

Da wir wissen, dass die Impulse in x-Richtung und y-Richtung und die Energie Konstanten der Bewegung sind, setzen wir

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \alpha_1 \equiv p_x = p_{x_0} \tag{107}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial y} = \alpha_2 \equiv p_y = p_{y_0} \tag{108}$$

und $E \equiv \alpha_3$, damit aus (106)

$$\frac{\partial S_3}{\partial z} = \pm\sqrt{2m(\alpha_3 - mgz) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} \tag{109}$$

aus (107) folgt $\quad S_i(x) = \int_{x_0}^{x} \alpha_1 d\tilde{x} = \alpha_1(x - x_0)$

aus (108) folgt $\quad S_2(y) = \int_{y_0}^{y} \alpha_2 d\tilde{y} = \alpha_2(y - y_0)$

aus (109) folgt $\quad S_3(z) = \int_{z_0}^{z} \sqrt{2m(\alpha_3 - mg\tilde{z}) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\, d\tilde{z}$

Hiermit bestimmen wir die β_i:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_1} = (x - x_0) \mp \int_{z_0}^{z} \alpha_1 \left[2m(\alpha_3 - mg\tilde{z}) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]^{-1/2} d\tilde{z} \tag{110}$$

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_2} = (y - y_0) \mp \int_{z_0}^{z} \alpha_2 \left[2m(\alpha_3 - mg\tilde{z}) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]^{-1/2} d\tilde{z} \tag{111}$$

$$\beta_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_3} = \pm m \int_{z_0}^{z} \left[2m(\alpha_3 - mg\tilde{z}) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]^{-1/2} d\tilde{z} \tag{112}$$

Aus den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen gewinnen wir

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_3 &= \frac{\partial \bar{H}(\alpha)}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_3} = 1 \\ \Rightarrow \beta_3 &= t - t_0 \end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_2 &= \frac{\partial \bar{H}(\alpha)}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_2} = 0 \\ \Rightarrow \beta_2 &= const. \end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= \frac{\partial \bar{H}(\alpha)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \Rightarrow \beta_1 &= const. \end{aligned} \tag{115}$$

Aus (113) und (114) und (115) erkennt man, dass

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (x-x_0) - \frac{\alpha_1}{m}\beta_3 \quad \text{und} \\ \beta_2 &= (y-y_0) - \frac{\alpha_2}{m}\beta_3\end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen und $\beta_3 = t - t_0$ folgt $\beta_1 = \beta_2 = 0$ und somit

$$\begin{aligned}x-x_0 &= \frac{\alpha_1}{m}(t-t_0) \quad \text{und} \\ y-y_0 &= \frac{\alpha_2}{m}(t-t_0)\end{aligned}$$

Aus (115) und $\beta_3 = t - t_0$ folgt aber

$$\begin{aligned}t-t_0 &= \pm m \int_{z_0}^{z} \left[2m(\alpha_3 - mg\tilde{z}) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]^{-1/2} d\tilde{z} \\ &= \mp \frac{1}{mg}\left[2m(\alpha_3 - mg\tilde{z}) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]^{-1/2}\Bigg|_{z_0}^{z}\end{aligned}$$

Multiplikation mit mg, Einsetzen der Grenzen, Ausdruck mit unterer Grenze z_0 auf linke Seite und Quadratur der so gewonnen Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}m^2g^2(t-t_0)^2 &\mp 2mg(t-t_0)\sqrt{2m(\alpha_3 - mgz_0) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} \\ &+ 2m(\alpha_3 - mgz_0) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \\ &= 2m\alpha_3 - 2m^2gz - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \\ \Rightarrow m^2g^2(t-t_0)^2 &\mp 2mg\cdot(t-t_0)\sqrt{2m(\alpha_3 - mgz_0) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} - 2m^2gz_0 \\ &= -2m^2gz\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann

$$z - z_0 = -\frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \pm \frac{t-t_0}{m}\sqrt{2m(\alpha_3 - mgz_0) - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}$$

wobei

$$\alpha_3 - mgz_0 = E - U_0 = T_0$$

Wir betrachten nun den Wurzelausdruck:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2mT_0 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} : &= \surd \\
\text{wegen}\, \alpha_1^2 &= p_x^2 = p_{x0}^2 \\
\text{und}\, \alpha_2^2 &= p_y^2 = p_{y0}^2 \\
\text{und}\, T_0 &= \frac{p_{x0}^2}{2m} + \frac{p_{y0}^2}{2m} + \frac{p_{z0}^2}{2m} \\
\text{ist}\, \surd &= \left[2m\Big(\frac{p_{x0}^2}{2m} + \frac{p_{y0}^2}{2m} + \frac{p_{z0}^2}{2m}\Big) - p_{x0}^2 - p_{y0}^2 \right]^{1/2} \\
&= (p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2 - p_{z0}^2 - p_{y0}^2)^{1/2} \\
&= (p_{z0}^2)^{1/2} \\
&= |p_{z0}|
\end{aligned}$$

Die tabellarische Übersicht der gewonnen Ergebnisse

$$\begin{aligned}
z - z_0 &= -\frac{1}{2} g(t-t_0)^2 + p_{z0}/m(t-t_0) \\
x - x_0 &= \frac{p_z}{m}(t-t_0) \\
y - y_0 &= \frac{p_y}{m}(t-t_0) \\
p_x &= \alpha_1 = const. \\
p_y &= \alpha_2 = const.
\end{aligned}$$

zeigt, dass das die Bewegung einer Wurfparabel ist.

d) Teilchen unter Einfluss einer konservativen zentralen Kraft:
Zur Aufstellung der Hamiltonfunktion in Polarkoordinaten benötigt man die Impulse. Man erhält sie aus der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
L(q,\dot{q}) &= T - U \\
&= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - U(r)
\end{aligned}$$

damit folgt für die generalisierten Impulse

$$
\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\
p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}_m r^2 \dot{\vartheta} \\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\vartheta \dot{\varphi} = J_z
\end{aligned}
$$

Für die Hamiltonfunktion ergibt sich somit

$$
H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2\vartheta r^2} + U(r)
$$

Da es sich um ein Zentralpotential handelt, ist das Problem eben. Wir legen die x-, y-Ebene in diese Bewegungsebene, d.h.

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= \frac{\pi}{2} \\
\dot{\vartheta} &= 0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt für die Hamiltonfunktion

$$
H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) = E
$$

Dies führt dann zur Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$
2mE = \left[\frac{\partial S(r,\varphi,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial S(r,\varphi,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \varphi}\right]^2 + 2mU(r)
$$

Wir machen wiederum einen Separationssatz:

$$
\begin{aligned}
S &= S_2(\varphi) + S_1(r) \quad \text{und es folgt} \\
2mE &= \left[\frac{\partial S_1(r,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial S_2(\varphi,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \varphi}\right]^2 + 2mU(r)
\end{aligned}
$$

Konstanten der Bewegung sind hier die Energie E und der Drehimpuls in z-Richtung $J_z = p_\varphi$. Wir setzen daher

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &\equiv E \\
\alpha_2 &\equiv J_z = p_\varphi
\end{aligned}
$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial S_2}{\partial \varphi} = \alpha_2 \Rightarrow S_2(\varphi) = \alpha_2 \varphi$$

(mit der Anfangsbedingung $\varphi_0 = 0$)
Daraus folgt dann

$$
\begin{aligned}
2m\alpha_1 &= \left[\frac{\partial S_1}{\partial r}\right]^2 + \alpha_2^2 \frac{1}{r^2} + 2mU(r) \\
\frac{\partial S_1}{\partial r} &= \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} - 2mU(r)} \\
S_1 &= \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{2m(\alpha_1 + U(\tilde{r})) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}\, d\tilde{r}}
\end{aligned}
$$

Bestimmung von β_2:

$$\beta_2 = \frac{\partial (S_1 + S_2)}{\partial \alpha_2} = \varphi + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{-\alpha_2}{\tilde{r}^2 \sqrt{2m(\alpha_1 - U(\tilde{r}) - \alpha_2^2/r^2}}\, d\tilde{r}$$

Zur Berechnung spezialisieren wir nun auf das spezielle Gravitationspotential $U(r) = -\frac{\gamma}{r}$. Es folgt dann durch Substitution $\frac{1}{r} = \mu$

$$\beta_2 = \varphi + \alpha_2 \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{2m(\alpha_1 + \gamma\mu) - \alpha_2^2 \mu^2}}$$

Ausführung des Integrals führt zu

$$\varphi - \beta_2 - \frac{\pi}{2} = arc\ \sin\left\{ - \frac{\mu - m\gamma/J_z^2}{\sqrt{\frac{m^2\gamma^1}{J_z^4} + \frac{2mE}{J_z^2}}}\right\}$$

mit $\mu = \frac{1}{r}$ folgt

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= \frac{J_z^2/m\gamma}{1 + \varepsilon\ \cos(\varphi - \beta_2)} \\ \text{mit:}\, \varepsilon_i &= \sqrt{1 + \frac{2EJ_z}{m\gamma^2}} \end{aligned}$$

Dies ist die bekannte Lösung des Problems:

ein Kegelschnitt!