6 Die kanonischen Bewegungsgleichungen

Ausgearbeitet von J. Pfeiffer und W. Gebel

6.1 Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

A) Wiederholung und Motivation neuer Bewegungsgleichungen:
An den Anfang unserer Betrachtungen hatten wir die Newton'schen Gesetze gestellt. Bei ihnen war die Bewegungsgleichung als Lex secunda explizit formuliert:

$$\dot{\vec{p}}_I = \vec{F}_i$$

Um auch Systeme mit Zwangsbedingungen behandeln zu können, fügten wir das D'Alembert'sche Prinzip

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\vec{F}}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

hinzu. $\vec{\vec{F}}$ hieß Zwangskraft, und $\vec{F}_i$ setzte sich nunmehr aus $\vec{\vec{F}}_i$ und $\vec{F}_i^W$ zusammen, wobei $\vec{F}_i^W$ eine Wechselwirkungskraft war.

$$\left(\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^W + \vec{\vec{F}}_i\right)$$

Durch das D'Alembert'sche Prinzip ließen sich die Zwangskräfte berechnen:

$$\vec{\vec{F}} = -\sum_{m=1}^{p} \lambda_m \vec{\nabla}_i \cdot G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

Hiernach fanden wir, dass sich mechanische System ("mechanisch" hießen solche System, für die das D'Alembert-Prinzip gilt) ebenso durch das Hamilton'sche Prinzip beschreiben lassen

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

wobei L eine Funktion der generalisierten Orte und Geschwindigkeiten war.

$$L = L(q_k, \dot{q}_k)$$

und wie sich herausstellte:

$$L(q_k, \dot{q}_k) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k)$$

Dabei folgte das Hamilton'sche Prinzip aus dem D'Alembert'schen zusätzlich Newton'schen Gesetzen. Die so genannten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen, die aus dem Hamilton'schen Prinzip folgten, haben sich als sehr leistungsfähig erwiesen.

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \ldots, s$$

Beide Formalismen führten auf Bewegungsgleichungssysteme aus Differentialgleichungen 2. Ordnung. Bei Lagrange II waren es genau s-Stück. Es kann nun manchmal von Vorteil sein, statt s Differentialgleichungen 2. Grades $2s$ Differentialgleichungen 1. Grades zu haben. Prinzipiell ist dieser Schritt immer möglich durch einen kleinen Trick:

Wir hatten $L(q_k, \dot{q}_k)$. q_k und $\dot{q}_k$ sind nicht unabhängig voneinander. Wir benennen nun $\dot{q}_k$ um in r_k und sehen r_k als unabhängig an:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &\rightarrow r_k \\ L(q_k, \dot{q}_k) &\rightarrow L(q_k, r_k) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L(q_k, r_k)}{\partial r_k}\Big) &- \frac{\partial L(q_k, r_k)}{\partial q_k} = 0 \end{aligned}$$

Hinzu kommt dann noch:

$$\dot{q}_k = r_k$$

Das sind $2s$ Differentialgleichungen 1. Ordnung. Da wir r_k als unabhängig betrachten, betrachten wir jetzt die Bahnkurve im $2s$-dimensionalen Konfigurationsraum. Diese Methode hier ist natürlich vom Physikalischen her trivial, es wurde ja mehr oder weniger nur umbenannt. Sie sollte die prinzipielle Möglichkeit der Umwandlung von s Differentialgleichungen 2. Ordnung in $2s$ Differentialgleichungen 1. Ordnung zeigen. Wir wählen im Folgenden einen Weg, der physikalisch etwas ergiebiger ist.

B) Hamiltonfunktion und Hamilton'sche Bewegungsgleichungen:
Von Kapitel 2 kennen wir noch die Definition des generalisierten Impulses:

$$p_k = \frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_k}$$

Definition 1:
Ein mechanisches System habe s Freiheitsgrade. Dann heißt

$$H(q_k, p_k) = \sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k)$$

die Hamiltonfunktion des Systems.

Bemerkungen:

a) Mittels $p_k = \frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_k}$ ist $\dot{q}$ zu eliminieren, so dass H tatsächlich $H(q_k, p_k)$ ist.
b) Man betrachtet q_k und p_k als die unabhängigen Variablen.
c) Wir beschränken uns auf Systeme, wo H nicht explizit von der Zeit abhängt, also $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ist. Man sieht aus der Definition, dass das gerade dann der Fall ist, wenn auch $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ist.

Herleitung der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen:
Dazu sei noch kurz an die Definition der Variation einer Funktion erinnert:

$$\delta f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \delta \vec{x}) - f(\vec{x})$$

wobei $\delta\vec{x}$ sehr klein, aber $\neq 0$. Daraus folgt:

$$\delta f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot \delta x_k$$

Bemerkung: Gleichheitszeichen richtig!
Begründung: siehe Variationsrechnung.

Es gelten ähnliche Rechenregeln wie beim Differenzieren. Nach Definition 1 gilt:

$$\delta H(q_k, p_k) = \delta\Big(\sum_{k=1}^{s} p_k\dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k)\Big)$$

a)

$$\begin{aligned}
& \delta\Big(\sum_{k=1}^{s} p_k\dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k)\Big) \\
= {} & \sum_{k=1}^{s}(p_k \cdot \delta\dot{q}_k + \dot{q}_k \cdot \delta p_k) - \sum_{k=1}^{s}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_k} \cdot \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta\dot{q}_k\Big) \\
\text{nach Lagr. Bewgl.} \quad = {} & \sum_{k=1}^{s}(p_k\delta\dot{q}_k + \dot{q}_k\delta p_k) - \sum_{k=1}^{s}(\dot{p}_k\delta q_k + p_k \cdot \delta\dot{q}_k) \\
= {} & \sum_{k=1}^{s}(\dot{q}_k\delta p_k - \dot{p}_k\delta q_k)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\delta H(q_k, p_k) &= \sum_{k=1}^{s}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\Big) \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{s}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\Big) &= \sum_{k=1}^{s}(\dot{q}_k\delta p_k - \dot{p}_k\delta q_k)
\end{aligned}$$

Die δq_k, δp_k sind unabhängig. Wir wählen

a) $\delta p_k = \delta q_k = 0$ mit Ausnahme von $\delta q_i \;\Rightarrow\; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

b) $\delta p_k = \delta q_k = 0$ mit Ausnahme von $\delta p_i \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

Die $2s$ Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H(q_k, p_k)}{\partial q_k} \quad \text{und} \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H(q_k, p_k)}{\partial p_k} \end{aligned}$$

heißen Hamilton'sche oder kanonische Bewegungsgleichungen.

Bemerkung:
Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen eignen sich weniger zur Lösung praktischer Probleme, als vielmehr für weitere theoretische Überlegungen.

C) Die physikalische Bedeutung von H:

$$\begin{aligned} H(p_k, q_k) &= \sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_k} \cdot \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k) \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q_k) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned}$$

also eine homogene Funktion 2. Grades in $\dot{q}_i$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \quad &\underline{1)} \quad \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T(q_k, \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \\ \Rightarrow H(p_k, q_k) &= 2T - (T - U) = T + U = E_{gesamt} \end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion ist identisch mit der Gesamtenergie.

<u>Satz:</u>
Hängt die Hamiltonfunktion von der Zeit nicht explizit ab, so ist die

Energie eine Erhaltungsgröße.

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(q_k(t),p_k(t)) &= \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\cdot\dot{p}_k\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\\ &= \sum_{k=1}^{s}(-\dot{p}_k\dot{q}_k + \dot{q}_k\dot{p}_k) = 0\end{aligned}$$

D) Anwedungsgebiete des Hamiltonformalismus:

1. Quantenmechanik ist auf Hamiltonformalismus aufgebaut.
2. Störungstheorie ist in der Hamilton'schen Formulierung einfacher. (Wenn Probleme - wie in der Praxis meistens - nicht exakt lösbar sind, so werden Näherungen gemacht. Man spaltet z.B. $H(q_k, p_k)$ in $H_0(q_k, p_k) + H'(q_k, p_k)$ auf, wobei $H_0(q_k, p_k)$ exakt lösbar ist und $H'(q_k, p_k)$ als "kleine" Störung angesehen wird.)
3. Statische Mechanik (arbeitet im "Phasenraum" p_k, q_k).

Bemerkung:
Die Feldtheorie (relativistisch) ist auf dem Lagrange-Formalismus aufgebaut, da $L(q_k, \dot{q}_k)$ im Gegensatz zu $H(q_k, p_k)$ eine relativistische Invariante ist.

6.2 Kanonische Transformationen

A) Begriffe:

a) Eine Größe heißt invariant bezüglich einer Transformation, wenn sie sich bei dieser Transformation nicht ändert (z.B. ist $\ddot{\vec{r}}$ invariant bei Galileitransformationen).

b) Eine Gleichung heißt kovariant bezüglich einer Transformation, wenn ihre Form sich bei dieser Transformation nicht ändert. Z.B. sind die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen kovariant bezüglich einer Transformation $q_i \to \bar{q}_i = \bar{q}_i(q_1, \ldots, q_s)$, wo $\bar{q}_i$ neue general. Orte sind:

$$
\begin{aligned}
L(q_k, q_k) &\rightarrow \bar{L}(\bar{q}_k, \dot{\bar{q}}_k) \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_k}\Big) &\rightarrow \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_k} = 0
\end{aligned}
$$

c) Seien $q_1, \ldots, q_s,\ p_1, \ldots, p_s$ generalisierte Orte und Impulse eines Systems. Eine Transformation der Form

$$
\begin{aligned}
q_k &\rightarrow \bar{q}_k(q_1, \ldots, q_s) \\
p_k &\rightarrow \bar{p}_k(q_1, \ldots, q_s,\ p_1, \ldots, p_s)
\end{aligned}
$$

heißt Punkttrasnformation (d.h. der Ortsraum transformiert sich unter sich).

Bemerkung:
Auch die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sind kovariant bezüglich Punkttransformationen:

$$
\begin{aligned}
p_k \rightarrow \bar{q}_k &= \bar{q}_k(q_1, \ldots, q_s) \\
\dot{\bar{q}}_k &= \frac{\partial \bar{H}(\bar{q}_k, \bar{p}_k)}{\partial \bar{p}_k} \\
\dot{\bar{p}}_k &= -\frac{\partial \bar{H}(\bar{q}_k, \bar{p}_k)}{\partial \bar{q}_k} \\
\text{wobei}\, \bar{p}_k &= \frac{\partial \bar{L}(\bar{q}_k, \dot{\bar{q}}_k}{\partial \dot{\bar{q}}_k}
\end{aligned}
$$

d) Der $2s$-dimensionale Raum (p_k, q_k) heißt Phasenraum.

B) Kanonische Transformationen:
Wir sehen q_k und p_k im Hamiltonformalismus als gleichberechtigte Variable an. Folglich sind auch allgemeinere Transformationen von Interesse, nämlich Transformationen der Form:

$$
\begin{aligned}
p_k &= p_k(\alpha, \beta) \\
q_k &= q_k(\alpha, \beta)
\end{aligned}
$$

wobei α_k die neuen Impulse und β_k die neuen Orte sind.

Definition:
Eine Transformation $p_k = p_k(\alpha, \beta)$; $q_k = q_k(\alpha, \beta)$ heißt <u>kanonisch</u>, wenn sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen kovariant lässt.

Erläuterung der Definition:
sei:

$$\begin{aligned} p_k &= p_k(\alpha, \beta) \\ q_k &= q_k(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

eine Transformation

$$H(p_k, q_k) = \bar{H}(\alpha_k, \beta_k)$$

dann heißt die Transformation kanonisch, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k} \\ \dot{\beta}_k &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k} \end{aligned}$$

Beispiele für kanonische Transformationen:

a) Punkttranformationen

b)

$$\begin{aligned} q_k &= \pm \alpha_k \\ p_k &= \mp \beta_k \end{aligned}$$

d.h. Orte und Impulse werden vertauscht, mit Minuszeichen versehen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \mp \dot{\beta}_k = \mp \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k} \Rightarrow \dot{\beta}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k} \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \Rightarrow \pm \dot{\alpha}_k = \mp \frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k} \Rightarrow \dot{\alpha}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k} \end{aligned}$$

Theorem:
Notwendig und hinreichend dafür, dass $p_k = p_k(\alpha,\beta)$ und $q_k = q_k(\alpha,\beta)$ kanonisch ist, ist die Existenz einer Funktion $W(q,\beta)$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial W(q,\beta)}{\partial q_k} \\ \alpha_k &= -\frac{\partial W(q,\beta)}{\partial \beta_k} \end{aligned}$$

W heißt Erzeugende oder erzeugende Funktion der Transformation.

Beweis:

I) Aus der Existenz von W $\Rightarrow$ Transformation ist kanonisch.

1. Beim Hamiltonprinzip wird die Zeit nicht mitvariiert; folglich gilt:

$$\delta\frac{dW(q,\beta)}{dt} - \frac{d}{dt}\delta W(q,\beta) = 0$$

a)

$$\begin{aligned} \delta\Big(\frac{dW}{dt}\Big) &= \delta\Bigg(\sum_{k=1}^{s}\Big(\frac{\partial W}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial W}{\partial \beta_k}\dot{\beta}_k\Big)\Bigg) \\ &= \delta\Big(\sum_{k=1}^{s}(p_k\dot{q}_k - \alpha_k\dot{\beta}_k)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{s}(p_k\cdot\delta\dot{q}_k + \dot{q}_k\delta p_k - \alpha_k\cdot\delta\dot{\beta}_k - \dot{\beta}_k\cdot\delta\alpha_k) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta W(q,\beta) &= \frac{d}{dt}\Bigg(\sum_{k=1}^{s}\Big(\frac{\partial W}{\partial q_k}\cdot\delta q_k + \frac{\partial W}{\partial \beta_k}\cdot\delta\beta_k\Big)\Bigg) \\ &= \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{s}(p_k\cdot\delta q_k - \alpha_k\cdot\delta\beta_k) \\ &= \sum_{k=1}^{s}(\dot{p}_k\cdot\delta q_k + p_k\cdot\delta\dot{q}_k - \dot{\alpha}_k\cdot\delta\beta_k - \alpha_k\cdot\delta\dot{\beta}_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \textstyle\sum_k \quad (p_k \cdot \delta\dot{q}_k + \dot{q}_k\delta p_k - \alpha_k\delta\dot{\beta}_k - \dot{\beta}_k\delta\alpha_k - \dot{p}_k\delta q_k - p_k\delta\dot{q}_k + \dot{\alpha}_k\delta\beta_k + \alpha_k\delta\dot{\beta}_k) \\
= \quad & \textstyle\sum_k \quad \big(\dot{q}_k\delta p_k - \dot{p}_k\delta q_k - (\dot{\beta}_k\delta\alpha_k - \dot{\alpha}_k\delta\beta_k)\big) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \textstyle\sum_k \quad (\dot{q}_k\delta p_k - \dot{p}_k\delta q_k) = \displaystyle\sum_k (\dot{\beta}_k\delta\alpha_k - \dot{\alpha}_k\delta\beta_k)
\end{aligned}$$

2. Wählt man die Variation von p_k, q_k, α_k, β_k "zusammengehörig", und zwar derart, dass

$$\delta p_k = \sum_i \left(\frac{\partial p_k}{\partial\alpha_i}\delta\alpha_i + \frac{\partial p_k}{\partial\beta_i}\cdot\delta\beta_i\right)$$

und

$$\delta q_k = \sum_i \left(\frac{\partial q_k}{\partial\alpha_i}\delta\alpha_i + \frac{\partial q_k}{\partial\beta_i}\delta\beta_i\right)$$

so gilt:

$$\delta\bar{H}(\alpha,\beta) = \delta H(p,q)$$

a)

$$\delta\bar{H}(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial\bar{H}}{\partial\alpha_k}\delta\alpha_k + \frac{\partial\bar{H}}{\partial\beta_k}\delta\beta_k\right)$$

b)

$$\begin{aligned}
\delta H(p,q) = \quad & \textstyle\sum_{k=1}^{s} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{s}(\dot{q}\delta p_k - \dot{p}_k\delta q_k) \\
\Rightarrow \quad & \textstyle\sum_{k=1}^{s} \quad (\dot{q}_k\delta p_k - \dot{p}_k\delta q_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial\bar{H}}{\partial\alpha_k}\delta\alpha_k + \frac{\partial\bar{H}}{\partial\beta_k}\delta\beta_k\right.
\end{aligned}$$

$$\text{1) und 2)} \Rightarrow \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial\bar{H}}{\partial\alpha_k}\delta\alpha_k + \frac{\partial\bar{H}}{\partial\beta_k}\delta\beta_k\right) = \sum_k(\dot{\beta}_k\delta\alpha_k - \dot{\alpha}_k\delta\beta_k)$$

Da $\delta\alpha_k$, $\delta\beta_k$ unabhängig:

$$\Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k} &= \dot{\beta}_k \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k} &= -\dot{\alpha}_k \end{aligned}$$

II) Einschub:
Bevor wir die Umkehrung des Satzes beweisen, leiten wir zunächst ein neues Variationsprinzip her, das wir dann verwenden wollen.

Wir gehen von Hamilton'schen Prinzip aus:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k) dt &= 0 \\ \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) &= 0 \\ \delta t &= 0 \end{aligned}$$

$k = 1, \ldots, s$, wobei s die Zahl der Freiheitsgrade ist.

Wir wollen jetzt das Prinzip im R_{2s} betrachten. Wir sehen deshalb q_k, $\dot{q}_k$ als unabhängig an; um dies zu betonen, nennen wir $\dot{q}_k$ jetzt r_k. L hängt also von $2s$ Variablen ab:

$$L = L(q_k, r_k)$$

Wir sehen q_k, r_k als unabhängig an, berücksichtigen aber die tatsächlich ja vorhandene Abhängigkeit getrennt in Form der Zwangsbedingung:

$$r_k - \dot{q}_k = 0$$

Dabei hat $\dot{q}_k$ nicht die Bedeutung einer Variablen, sondern wird als Zahl angesehen.

$$\begin{aligned} r_k - \dot{q}_k(t) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(-r_k + \dot{q}_k(t)) &= 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(-r_k + \dot{q}_k(t)) dt &= 0 \end{aligned}$$

Mit Hamilton:

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[L(q_k, r_k) + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(-r_k + \dot{q}_k(t))\Big] dt = 0 \qquad (95)$$

Berechnung von λ_k:

$$(95) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Big[\frac{\partial L(q_k, r_k)}{\partial q_k} \cdot \delta q_k + \frac{\partial L(q_k, r_k)}{\partial r_k} \cdot \delta r_k - \lambda_k \cdot \delta r_k + \lambda_k \cdot \frac{d}{dt}\delta q_k\Big] = 0$$

Da q_k, r_k unabhängig, wählen wir:

$$\delta q_k = \delta r_k = 0$$

Außer $\delta r_{k'}$:

$$\begin{aligned} \delta r_{k'}(t) &\neq 0 \,\text{für}\, t \in [t^*, t^* + \delta t] \\ \delta r_{k'}(t) &= 0 \,\text{für}\, t \notin [t^*, t^* + \delta t] \\ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial r_{k'}} &= \lambda_{k'} = p_{k'} \end{aligned}$$

Damit schreibt sich (95) als:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[L(q_k, r_k) + \sum_k p_k \cdot (-r_k + \dot{q}_k(t))\Big] dt =$$

unter Benutzung der Definition von H:

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k)\Big] dt = 0$$

Bemerkung:
Dies ist ein Variationsprinzip im R_{2s} (Variablen: p_k, q_k; $\dot{q}_k$ ist über $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ zu eliminieren). Über dieses Variationsprinzip lässt sich folgender Satz beweisen:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k)\Big] dt = 0$$

ist den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen äquivalent. Beweis:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k)\Big] dt &= 0 \\
\Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{s} \Big(p_k \delta\dot{q}_k + \dot{q}_k \cdot \delta p_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k\Big)\right] dt = 0 & \\
\Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{s} \left(\Big\{\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\Big\}\delta p_k - \Big\{\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\Big\}\delta q_k\right) dt = 0 & \qquad (96)
\end{aligned}$$

Benutze dazu:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} p_k \delta\dot{q}_k dt &= \underbrace{\Big[p_k \delta q_k\Big]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k \delta q_k dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} -\dot{p}_k \delta q_k dt \\
\Leftrightarrow \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\
\Leftrightarrow \dot{q}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}
\end{aligned}$$

Bemerkung:
"$\Rightarrow$" folgt durch die Unabhängigkeit von δp_k, δq_k, indem man zuerst setzt: $\delta p_k = \delta q_k = 0$ bis auf ein δq_k. "$\Leftarrow$" folgt durch Einsetzen der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen in (96).

III) **Beweis der Umkehrung:**
Transformation kanonisch $\Rightarrow$ Es existiert $W(q_k, \beta_k)$ mit den genannten Eigenschaften.

$$\begin{aligned}
p_k = p_k(\alpha_k, \beta_k) \quad &\Leftrightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \dot{\beta}_k - \bar{H}(\alpha_k, \beta_k)\Big) dt = 0 \\
q_k = q_k(\alpha_k, \beta_k) \quad &\Leftrightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k)\Big) dt = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beide Integranden können sich also nur um eine Funktion unterscheiden, bei der die Variation ihres Integrals verschwindet; die allgemeinste Funktion dieser Art lautet:

$$\frac{d}{dt}W(p,q,\alpha,\beta)$$

denn

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}W(p,q,\alpha,\beta)dt = 0$$

da

$$\begin{aligned}
\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) &= 0\\
\delta p_k(t_1) = \delta p_k(t_2) &= 0\\
\delta \beta_k(t_1) = \delta \beta_k(t_2) &= 0\\
\delta \alpha_k(t_1) = \delta \alpha_k(t_2) &= 0
\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der Integranden folgt dann:

$$\sum_{k=1}^{s}(-\alpha_k\dot{\beta}_k + p_k\dot{q}_k) = \frac{d}{dt}W(p,q,\alpha,\beta)$$

mittels $p_k = p_k(\alpha_k,\beta_k)$ und $q_k = q_k(\alpha_k,\beta_k)$ kann man aus $W(p,q,\alpha,\beta)$ die p_k und α_k eliminieren. Man hat dann $W(q,\beta)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widetilde{W}(q,\beta) &= \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial q_k}\cdot\dot{q}_k + \frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\beta_k}\cdot\dot{\beta}_k\right)\\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{s}(-\alpha_k\dot{\beta}_k + p_k\dot{q}_k = &= \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial q_k}\cdot\dot{q}_k + \frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\beta_k}\cdot\dot{\beta}_k\right)\\
\Rightarrow \sum\left\{\left(\alpha_k + \frac{\partial\widetilde{W}}{\partial\beta_k}\right)\dot{\beta}_k\right. &+ \left.\left(-p_k + \frac{\partial\widetilde{W}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\right\} = 0
\end{aligned}$$

Da q_k, β_k als unabhängig betrachtet werden können.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \alpha_k &= -\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \beta_k} \\
\Rightarrow p_k &= \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial q_k}
\end{aligned}
$$

Wir sehen p_k und q_k bzw. α_k und β_k als gleichberechtigte Variablen an; wenn das so ist, so müsste es nicht nur Erzeugende einer Transformation geben, die wie $W_{(1)}$ von (q_k, β_k) abhängen, sondern auch solche der Form:

$$
\begin{aligned}
W_2 &= W_2(q_k, \alpha_k) \\
W_3 &= W_3(p_k, \beta_k) \\
W_4 &= W_4(p_k, \alpha_k)
\end{aligned}
$$

Dass dem so ist, kann leicht gezeigt werden:

a) $\underline{W_2(q, \alpha)}$:
Es gelte für die Transformation:

$$
\begin{aligned}
p_k &= \frac{\partial W_2(q, \alpha)}{\partial q_k} \\
\beta_k &= \frac{\partial W_2(q, \alpha)}{\partial \alpha_k}
\end{aligned}
$$

Auch hier ist die Transformation kanonisch, denn es sei:

$$
W_1(q, \beta) = W_2(q, \alpha) - \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \beta_k
$$

dann gilt für $W_1(q, \beta)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W_1}{\partial q_k} = \frac{\partial W_2}{\partial q_k} &= p_k \\
\frac{\partial W_1}{\partial \beta_k} &= -\alpha_k
\end{aligned}
$$

b) $\underline{W_3(p,\beta)}$:
Für eine Transformation gelte:

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{-\partial W_3}{\partial p_k} \\ \alpha_k &= \frac{-\partial W_3}{\partial \beta_k} \end{aligned}$$

Dann ist die Transformation kanonisch, denn es sei:

$$W_1(q,\beta) = W_3(p,\beta) + \sum_k p_k q_k$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial q_k} &= p_k \\ \frac{\partial W_1}{\partial \beta_k} = \frac{\partial W_3}{\partial \beta_k} &= -\alpha_k \end{aligned}$$

c) $\underline{W_4(p,\alpha)}$:
Für eine Transformation gelte:

$$\begin{aligned} q_k &= -\frac{\partial W_4}{\partial p_k} \\ \beta_k &= \frac{\partial W_4}{\partial \alpha_k} \end{aligned}$$

Dann ist die Transformation kanonisch, denn es sei:

$$W_1(q,\beta) = W_4(p,\alpha) + \sum_k p_k q_k - \sum_k \alpha_k \beta_k$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial q_k} &= p_k \\ \frac{\partial W_1}{\partial \beta_k} &= -\alpha_k \end{aligned}$$

Bemerkung zu a):
Das durch $W_2(q,\alpha) - \sum \alpha_k \beta_k = W_1(q,\beta)$ definierte W_1 ist tatsächlich nur eine Funktion von (q,β), denn $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha_k} = 0$! Entsprechend bei b), c).

Beispiele kanonischer Transformationen:

1.
$$\begin{aligned} W_1(q,\beta) &= \sum_k q_k \beta_k \\ \Rightarrow p_k &= \frac{\partial W}{\partial q_k} = \beta_k \\ \Rightarrow \alpha_k &= -\frac{\partial W}{\partial \beta_k} = -q_k \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} W_3(p,\beta) &= \sum_k p_k \beta_k \\ \Rightarrow q_k &= -\beta_k \\ \Rightarrow \alpha_k &= p_k \end{aligned}$$

Fast die identische Transformation.

3.
$$\begin{aligned} W_2(q,\alpha) &= \sum_k \alpha_k Q_k(q) \\ \Rightarrow p_{k'} &= \frac{\partial W_2}{\partial q_{k'}} = \sum_k \alpha_k \frac{\partial Q_k(q)}{\partial q_{k'}} \\ \Rightarrow \beta_k &= \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_k} = Q_k(q) \end{aligned}$$

“Punkttransformation“

6.3 Verschiedene Variationsprinzipien

In diesem Abschnitt handelt es sich darum, einige grundlegende Variationsprinzipien kennenzulernen. Es sei vorher betont, dass diese i.a. nur wenig dazu beitragen, die Lösung praktischer mechanischer Probleme zu vereinfachen, sondern dass ihr Wert vor allem darin liegt, theoretische Erkenntnisse zu liefern, aus denen dann ggf. neue Formalismen zur praktischen Rechnung abgeleitet werden können.

A) Zusammenfassung: Definitionen und Regeln in der Variationsrechnung:
Variation $\delta\vec{x}$ einer Größe $\vec{x} \in R_n$ ist eine beliebig kleine, aber endliche Änderung von $\vec{x}[\delta\vec{x} = (\delta x_1, \ldots, \delta x_n)]$ (bei Orten sog. "virtuelle Verrückungen").

Ist $f : \vec{x} \to f(\vec{x}) \in R$ eine (differenzierbare) Funktion von $\vec{x}$, so kann eine Taylorentwicklung für $f(\vec{x}+\delta\vec{x})$ stets nach dem 1. Glied abgebrochen werden.

$$f(\vec{x}+\delta\vec{x}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \cdot \delta x_i = f(\vec{x}) + \vec{\nabla} f(x) \cdot \delta\vec{x}$$

Unter Variation der Funktion $f(\vec{x})$ versteht man

$$\delta f(\vec{x}) = f(\vec{x}+\delta\vec{x}) - f(\vec{x}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \cdot \delta x_i$$

Daher gelten für δf die Regeln der normalen Differentialgleichung, z.B.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad &\Rightarrow \quad \delta f(x_1, x_2) \\ = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2 \quad &= \quad x_2 \delta x_1 + x_1 \cdot \delta x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = h(y(x)) \quad &\Rightarrow \quad \delta g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \delta x \\ = \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \delta y(x) \quad &= \quad \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) \quad &= \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ \Rightarrow \delta F(x_1, x_2) \quad &= \quad \int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) \cdot dx + [f(x) \cdot \delta x]_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

Ist t die Zeit, so wird bei physikalischen Problemen immer $\delta(\frac{d}{dt}) \equiv \frac{d}{dt}\delta$ vorausgesetzt. D.h. die Zeit wird nicht variiert.

B) Wiederholung über das Hamilton'sche Variationsprinzip:
Als wichtigstes Variationsprinzip haben wir das Hamilton-Prinzip schon behandelt (2.2). Wir sind wie folgt vorgegangen:

Sind die Zwangsbedingungen von der Zeit abhängig $[G_m \neq G_m(t)]$, so gilt das D'Alembert'sche Prinzip: Die Summe der Zwangskräfte leistet keine Arbeit.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\tilde{F}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Daraus haben wir das Hamilton'sche Prinzip hergeleitet:

Für ein Teilchen, das sich im s-dimensionalen Konfigurationsraum ($q = (q_1, \ldots, q_s)$) vom Punkt 1 nach 2 bewegt, haben wir einen Referenzweg (z.B. "B") derart durch virtuelle Abweichungen variiert (z.B. zu "A" oder "C"), dass die beiden Bedingungen erfüllt sind:

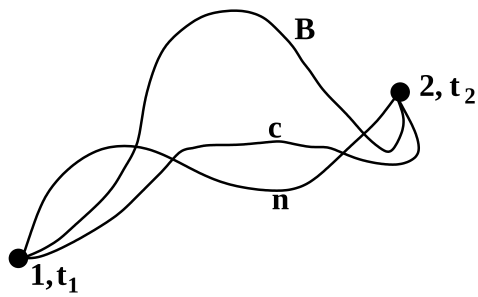

Abbildung 67:

a)

$$\begin{aligned} \delta q_i(t_1) &= 0 \\ \delta q_i(t_2) &= 0 \end{aligned}$$

D.h. die Endpunkte sind fest.

b)

$$\delta t = 0$$

D.h. die Zeit wird nicht mitvariiert.

Wir fanden damit das Hamilton'sche Prinzip:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0$$

C) Herleitung eines allgemeinen Variationsprinzips:
Es sollen jetzt die Voraussetzungen $\delta t = 0$ und $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ fallen gelassen werden und ein allgemeines Prinzip formuliert werden, aus dem durch neue beschränkende Bedingungen an die Variation andere Variationsprinzipien gewonnen werden. Im Falle $\delta t \equiv \Delta t = 0$ war ("B" sei Referenzbahn):

$$\vec{r}_{iB}(t) + \Delta\vec{r}_i(t+0) = \vec{r}_{iC}(t)$$

Falls $\delta t \neq 0$ ist $\vec{r}_{iC}(t + \Delta t) =$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{iB}(t) + \Delta\vec{r}_i(t+\Delta t) &= \vec{r}_{iB}(t) + \delta\vec{r}_i(t) + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \delta t \\ \Rightarrow \Delta\vec{r}_i(t+\delta t) &= \delta\vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta t \end{aligned}$$

Wir betrachten das Wirkungsintegral W definiert als $\int_{t_1}^{t_2} 2T dt$:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(2T) dt + [2T\delta t]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \Big[\delta(T+U) + \delta(T-U)\Big] dt + [2T\delta t]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta E dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + [2T\delta t]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Behandle:

$$2T = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

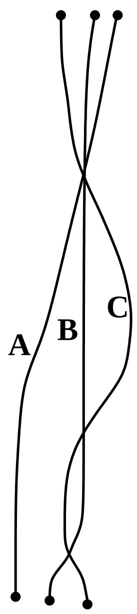

Abbildung 68:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta\Big(\sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i^2\Big)dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta U(\vec{r}_i)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \delta\dot{\vec{r}}_i dt - \int \sum_i \underbrace{\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_i)}_{-\vec{F}_i} \cdot \delta\vec{r}_i dt \\
&= \Big[\sum m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\Big]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i (-\vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \sum_i (m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\delta\vec{r}_i dt + \Big[\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i(t)\Big]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}$$

Wenn wir auch hier das D'Alembert'sche Prinzip voraussetzen, ist

$$\sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\delta\vec{r}_i = \sum_i \bar{\vec{F}}_i \delta\vec{r}_i = 0$$

also:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \left[\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta r_i \right]_{t_1}^{t_2}$$

Setzen wir ein:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_{t_1}^{t_2} \delta E dt + \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} + \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i^2 \cdot \delta t \right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta E dt + \left\{ \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{(\delta \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta t)}_{=\Delta \vec{r}_i} \right\}_{t_1}^{t_2} \\
\delta W &= \int_{t_1}^{t_2} \delta E dt + \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \cdot \Delta \vec{r}_i \right]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}$$

Die eckige Klammer stellt einen Oberflächenterm des Integrals dar, der die Variation am Anfang und am Ende der Bahnkurve berücksichtigt.

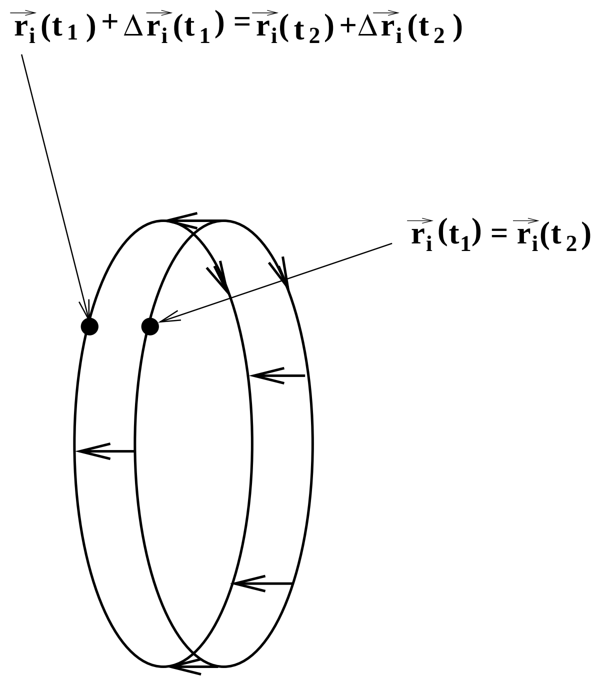

Abbildung 69:

D) 1. Anwendung:

Voraussetzung:
Eine **geschlossene Kurve** C_1 werde so in C_2 variiert, dass der Energieunterschied zwischen C_1 und C_2 stets $\delta E = const.$ ist. Dann ist, wenn wir über einen Umlauf integrieren [d.h. $t_2 - t_1 = r$, die Umlaufzeit ist]:

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \delta E \cdot dt + \sum_i m_i \cdot \left\{ \dot{\vec{r}}_i(t_2) \cdot \Delta\vec{r}_i(t_2) - \dot{\vec{r}}_i(t_1) \cdot \Delta\vec{r}_i(t_1) \right\}$$

Weil auch $C_2[t_1, t_2]$ geschlossen ist, muss

$$\dot{\vec{r}}_i(t_2) \cdot \Delta\vec{r}_i(t_2) = \dot{\vec{r}}_i(t_1) \cdot \Delta\vec{r}_i(t_1)$$

sein.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta W &= \delta E \cdot \tau + 0 \\ \Rightarrow \tau &= \frac{\delta W}{\delta E} = \frac{\partial W}{\partial E} \end{aligned}$$

Ist ein Vorgang periodisch, so berechnet sich die Umlaufzeit:

$$\tau = \frac{\partial W}{\partial E}$$

Beispiel:
Im **Bohr'schen Atommodell** haben wir z.B. zwei periodische Bahnen, die zur Konkurrenz zugelassen sind. Die Energie auf jeder Bahn ist konstant, so dass auch $\delta E = const.$ zwischen beiden Bahnen. Nun ist $W = \oint 2T dt$ (Integral über einen Umlauf eines Elektrons)

$$W = \oint \sum_k p_k \dot{q}_k dt = \oint \sum_k p_k \cdot dq_k$$

denn

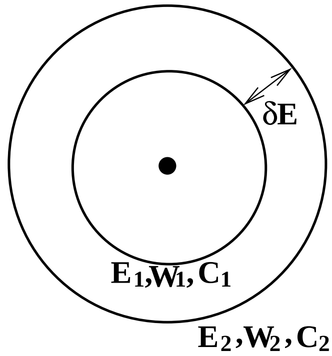

Abbildung 70:

$$
\begin{aligned}
2T(q,\dot{q}) &= \sum_k \frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_k} \cdot \dot{q}_k \\
2T(q,\dot{q}) &= \sum_{k=1}^{s} \underbrace{\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \cdot \dot{q}_k = \sum_k p_k \cdot \dot{q}_k
\end{aligned}
$$

Hier ist $s = 1$ und $p_1 = j_z$ (Drehimpuls um z-Achse); $q_1 = \phi$. Die Forderung, die Bohr zur Quantisierung der Bahnen einführte, war $W = \oint p \cdot dq = n \cdot h$; $n \in N$.

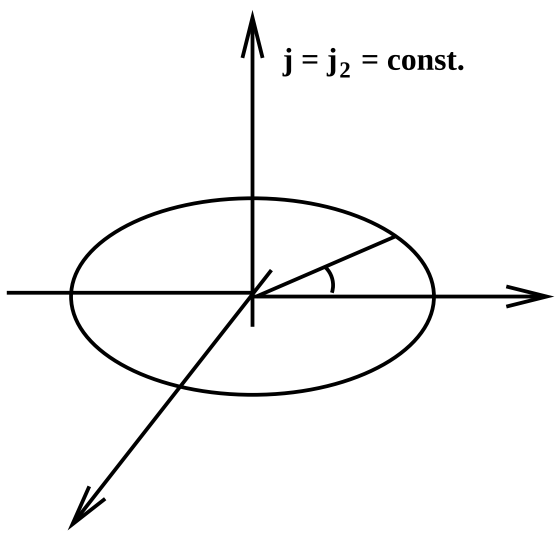

Abbildung 71:

Mit $W = \oint pdq = \oint j_z \cdot d\phi = 2\pi \cdot j_z$ folgt:

$$J_z = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n \cdot \vec{n} \qquad \left[\vec{n} := \frac{h}{2\pi} = 1.05\,10^{-27}\,erg\,sec\right]$$

Die Wirkung $W = n \cdot h$ ist also quantisiert wie die Ladung. Die kleinste Wirkung ist h.

E) 2. Anwendung:

Voraussetzung:
Eine Referenzbahn werde so variiert, dass die Konkurrenzbahnen dieselbe Energie haben.

a) $\delta E \equiv 0$, und außerdem die Endpunkte fest sind,
b) $\Delta \vec{r}_i(t_1) = \delta \vec{r}_i(t_1) + \dot{\vec{r}}_i(t_1) \cdot \delta t_1 = 0$ und $\Delta \vec{r}_i(t_2) = 0$. (Im Gegensatz zu Hamilton wird die Zeit variiert, nicht aber die Energie!)

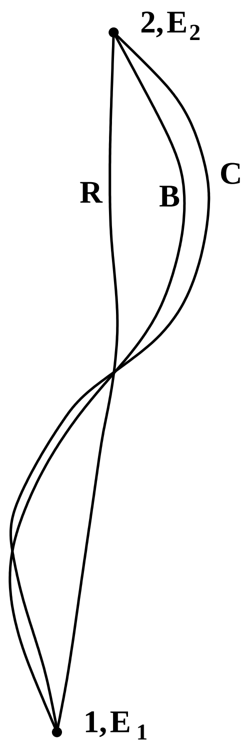

Abbildung 72:

$$
\begin{aligned}
\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\delta E}_{=0} dt + \Big[\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \cdot \Delta \vec{r}_i \Big]_{t_1}^{t_2} \\
&= \sum_{i=1} m_i \cdot \Big\{ \dot{\vec{r}}_i(t_2) \cdot \underbrace{\Delta \vec{r}_i(t_2)}_{=0} - \dot{\vec{r}}_i(t_1) \cdot \underbrace{\Delta \vec{r}_i(t_1)}_{=0} \Big\} = 0 \\
\delta W &= 0
\end{aligned}
$$

heißt das Prinzip der kleinsten Wirkung von Maupertius.

Wie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen aus dem Hamilton-Prinzip, folgen die Hamilton'schen oder kanonischen Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip von Maupertius.

$$
W = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1} p_k \cdot \dot{q}_k dt = \int_{q(t_1)}^{q(t_2)} \sum p_k \cdot dq_k
$$

Vergleiche "1. Anwendung":

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_k p_k \cdot \dot{q}_k \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \Big(\sum_k p_k \cdot \dot{q}_k \Big) dt + \Big[\sum_k p_k \cdot \dot{q}_k \cdot \delta t \Big]_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k (\dot{q}_k \cdot \delta p_k + p_k \cdot \delta \dot{q}_k) \cdot dt + \Bigg[\sum_k p_k \cdot \underbrace{\Big(\frac{\partial q_k}{\partial t} \cdot \dot{t} \Big)}_{=\delta q_k(t)} \Bigg]_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k (\dot{q}_k \cdot \delta p_k) dt + \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_k p_k \delta \dot{q}_k \Big) dt + \Big[\sum_k p_k(t_2) \underbrace{\delta q_k(t_2)}_{=0} - p_k(t_1) \underbrace{\delta q_k(t_1)}_{=0} \Big]
\end{aligned}
$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$
0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k (\dot{q}_k \delta p_k) dt + \sum_k \underbrace{\big[p_k \cdot \delta q_k \big]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k (\dot{p}_k \cdot \delta q_k) dt
$$

$$
\int_{t_1}^{t_2} \sum_k (\dot{q}_k \cdot \delta p_k - \dot{p}_k \cdot \delta q_k) \cdot dt \tag{97}
$$

Die totale Energie ist die Hamilton-Funktion, also $\delta E = \delta H \overset{(a)}{=} 0$

$$0 = \delta H(p,q) = \sum_k \Big(\frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \delta q_k\Big) \quad \text{(nach Voraussetzung)}$$

$$\Rightarrow\ 0 = \int_{t_1}^{t_2} 0 \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta H \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \Big(\frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \delta q_k\Big) dt \quad (98)$$

Subtrahiere (98) von (97):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \sum_k (\dot{q}_k \cdot \delta p_k - \dot{p}_k \cdot \delta q_k) - \sum_k \Big(\frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \delta q_k\Big) \Big\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \Bigg(\Big\{ \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \Big\} \delta p_k - \Big\{ \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \Big\} \delta q_k \Bigg) dt \end{aligned}$$

Da die δq_k, δp_k als unabhängig betrachtet werden, wählen wir wie üblich alle $\delta q_k = \delta p_k = 0$, außer $\delta q_{k_0} \neq 0$ auf dem sehr kleine Interval $< t, t + \Delta t >$. $\Rightarrow \dot{p}_{k_0} = -\frac{\partial H}{\partial q_{k_0}}$. So verfahren wir der Reihe nach mit allen q_k, dann mit den p_k und erhalten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned}$$

F) Die Energie ist zeitabhängig:
Wir wissen von früher, dass ein weiteres Kriterium für die Energieerhaltung ist, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt (vgl. 2.5.). $E = H$: Aus $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$ (Energieerhaltung) folgt also:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dH}{dt} &= \sum_k \Big(\frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \dot{p}_k\Big) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_k \Big(\frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k}\Big) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion hängt ebenfalls nicht explizit von der Zeit ab.

Energieerhaltung liegt aber gerade dann vor, wenn die äußeren und die Zwangskräfte im System keine Arbeit leisten, d.h. wenn das D'Alembert'sche Prinzip erfüllt ist. Wenn also $H = H(p, q, t)$ explizit von t abhängt, versagen alle bisherigen Variationsverfahren, in denen stets das d'Alembert'sche Prinzip angewendet worden ist.

In diesem Fall definiert man $p_0 = -E$ und $q_0 = T$ sowie die Größe $\kappa = \kappa(p_0, \ldots, p_s, q_0, \ldots, q_s) = p_0 + H(p_{k>0}, q_{k>0}, t)$. Dann lauten die "erweiterten" kanonischen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial \kappa}{\partial q_k} \\ \text{für } \kappa &= 0, 1, \ldots, s \end{aligned}$$

d.h. speziell für $\kappa = 0$: $(-\dot{E}) = -\frac{\partial \kappa}{\partial t}$ und $\dot{t} = \frac{\partial \kappa}{\partial(-E)}$; man nennt die Größen t und $-H = -E$ <u>konjugiert</u>.

<u>Bemerkung:</u>
Man entkoppelt also - wie auch schon früher - die Größen E von H und p, q von t, indem p_0 und q_0 zunächst im R_{2s+2} also unabhängig von den übrigen betrachtet werden und dann über eine Zwangsbedingung wieder gekoppelt werden. Diese ist hier trivial:

$$\begin{aligned} \kappa = p_0 + H(p_{k\neq 0}, q) &= -E + E = 0 \\ \Rightarrow \delta\kappa &= 0 \end{aligned}$$

<u>Der Beweis</u> für die verallgemeinerten Hamilton'schen Bewegungsgleichungen folgt aus dem Hamilton-Prinzip $\delta \int L dt = 0$. Dieses behält nämlich auch bei $L = L(t)$ seine Gültigkeit. Wie bei unserem Beweis des Hamilton-Prinzips muss dabei an die Variation der Forderung gestellt werden:

a)

$$\delta t \equiv 0$$

b)

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

Wir führen noch einen neuen Kurvenparameter $u = u(t)$ ein. Hierdurch soll die Auszeichnung der Zeit gegenüber anderen generalisierten Orten vermieden werden. Dann ist

$$\dot{q}_k(t) \cdot dt = \frac{dq_k}{du} \cdot \frac{du}{dt} = q'_k(u) \cdot du$$

Das gilt auch für:

$$\dot{q}_0 \cdot dt = q'_0 \cdot du$$

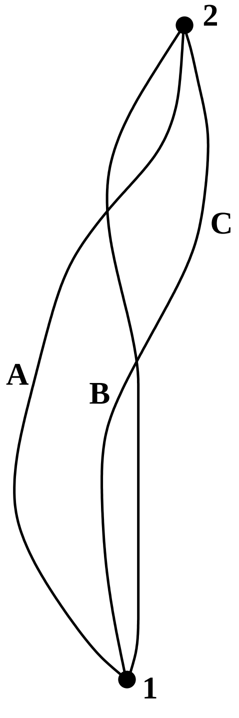

Abbildung 73:

Es sei $q = (q_1, \ldots, q_s)$; $p = (p_1, \ldots, p_s)$ bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, q_0) \cdot dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (2T - H) dt \\
&= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{k=1}^{s} (p_k \cdot \dot{q}_k) - H(p, q, q_0) \right\} dt \\
&= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{k=1}^{s} (p_k \dot{q}_k) + \underbrace{(-H)}_{=p_0} \cdot \underbrace{1}_{=\dot{q}_0} \right\} dt \\
&= \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{s} p_k \dot{q}_k dt = \delta \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \sum_{k=0}^{s} p_k(u) \cdot q_k'(u) du \\
&= \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \sum_{k=0}^{s} (\delta p_k \cdot q_k' + p_k \cdot \delta q_k') du + \left[\sum_{k=0}^{s} p_k \cdot \delta q_k \right]_{u(t_1)}^{u(t_2)}
\end{aligned}
$$

Der zweite Term im Integrand wird partiell integriert:

$$
0 = \int_{u_1}^{u_2} \sum_{k=0}^{s} (q_k' \cdot \delta p_k - p_k' \cdot \delta q_k) du + \left[\sum_{k=0}^{s} p_k \cdot \underbrace{\delta q_k}_{=\delta q_k(t_{1/2})=0} \right]_{t_1}^{t_2} + \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{s} p_k \cdot \delta q_k \right]_{u(t_1)}^{u(t_2)}}_{=0} \tag{99}
$$

Außerdem ist noch (s. oben)

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta \kappa = \sum_{k=0}^{s} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial q_k} \cdot \delta q_k + \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} \cdot \delta p_k \right) \\
\Rightarrow 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{s} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} \cdot \delta p_k \right) dt \qquad (100) \\
&= \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \sum_{k=0}^{s} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} \cdot \delta p_k \right) \cdot \underbrace{\left(\frac{dt}{du} \right)}_{=\lambda(u)} \cdot du
\end{aligned}
$$

(100) wird von (99) abgezogen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \left\{ \sum_{k=0}^{s} (q_k' \cdot \delta p_k - p_k' \cdot \delta q_k) - \sum_{k=0}^{s} \lambda(u) \cdot \left(\frac{\partial \kappa}{\partial p_k} \delta q_k + \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} \cdot \delta p_k \right) \right\} du \\
&= \int_{u_1}^{u_2} \sum_{k=0}^{s} \left(\left\{ q_k' - \lambda(u) \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} \right\} \delta p_k - \left\{ p_k' + \lambda(u) \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial q_k} \right\} \delta q_k \right) du
\end{aligned}
$$

δq_k, δp_k linear unabhängig:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow q_k' &= \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} \cdot \lambda(u) && \text{und} \\
\Rightarrow p_k' &= -\frac{\partial \kappa}{\partial q_k} \cdot \lambda(u) && \\
\Rightarrow \frac{dq_k}{du} \cdot \frac{du}{dt} &= \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} && \text{und} \\
\Rightarrow \frac{dp_k}{du} \cdot \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \kappa}{\partial q_k} && \\
\Rightarrow \dot{q}_k &= \frac{\partial \kappa}{\partial p_k} && \text{und} \\
\Rightarrow \dot{p}_k &= -\frac{\partial \kappa}{\partial q_k} && \text{für } k = 0, 1, \ldots, s
\end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ ist

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial(p_0 + H(p, q, t))}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

weil ja $p_0 = -E$ als unabhängig angesehen wird.

$$\dot{q}_k = +\frac{\partial(p_0 + H(p, q, t))}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Für $k = 0$ ist

$$\dot{p}_0 = (-\dot{E}) = -\frac{\partial(p_0 + H(p, q, t))}{\partial q_0} = -\frac{\partial H}{\partial t}(\neq 0)$$

was übereinstimmt mit dem obigen abgeleiteten Ergebnis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E &= \frac{d}{dt}H = \frac{\partial H}{\partial t} \\
\dot{q}_0 = \frac{dt}{dt} = 1 = \frac{\partial \kappa}{\partial p_0} &= \frac{\partial(p_0 + H(p_{k\neq 0}, q_{k\neq 0}, t))}{\partial p_0} = \frac{\partial p_0}{\partial p_0}
\end{aligned}$$