5 Gravitationstheorie

Ausgearbeitet von G. Knaup und H. Walitzki

5.1 Gravitationskraft - Gravitationsfeld

Die Grundidee zur Gravitationstheorie stammt von Newton (1643 - 1727): Die Kraft, die einen Apfel fallen lässt, ist die gleiche, die den Mond in eine Bahn um die Erde zwingt, die Erde in eine Bahn um die Sonne usw. In allen Fällen ziehen sich Massen einander an. Die Kraft, mit der sie sich anziehen, ist abhängig von der Größe dieser Massen und ihrem Abstand voneinander. Aus dem "Lex Tertia" (Actio = Reactio) folgt, dass es sich um eine beiderseitige Anziehung handelt, also der Apfel von der Erde und die Erde vom Apfel angezogen wird. Durch Messungen erhielt man:

$$|\vec{F}| = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \qquad \left[N = \frac{kg\, m}{sec^2}\right] \tag{80}$$

γ wird Gravitationskonstante genannt und ist:

$$\begin{aligned} \gamma &= 6,67 \cdot 10^{-11} \qquad & [Nm^2\, kg^{-2}] \\ \gamma &= 6,67 \cdot 10^{-8} \qquad & [cm^3\, g^{-1}\, sec^{-1}] \end{aligned}$$

Die Gravitationskraft zeigt immer in Richtung des Einheitsvektors

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

der Verbindungsstrecke zwischen beiden Massen (Zentralkraft) und wirkt immer anziehend. N = Newton ist die Einheit der Kraft.

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$\vec{F}_{12}$ ist die Kraft <u>auf</u> das erste Teilchen als Wirkung des zweiten Teilchens. Da die Gravitationskraft <u>konservativ</u> und <u>zentral</u> ist, können wir sie als Gradient einer potentiellen Energie schreiben, die nur vom Betrag von $\vec{r}_{12}$ abhängt.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla} U(|\vec{r}_{12}|) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U(|\vec{r}_{12}|) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{81}$$

Oder umgekehrt können wir die potentielle Energie schreiben als:

$$U_{12} = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\int^{r=|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \infty \vec{F}_{12} d\vec{r} = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{82}$$

Ist die Masse m_2 kein Massenpunkt, sondern ausgedehnt (also aus verschiedenen Massepunkten zusammengesetzt), so addieren sich die Wirkungen aller einzelnen Massepunkte auf die Masse m_1 (Superposition). Man muss also alle einzelnen Kräfte aufsummieren.

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{m \cdot m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{83}$$

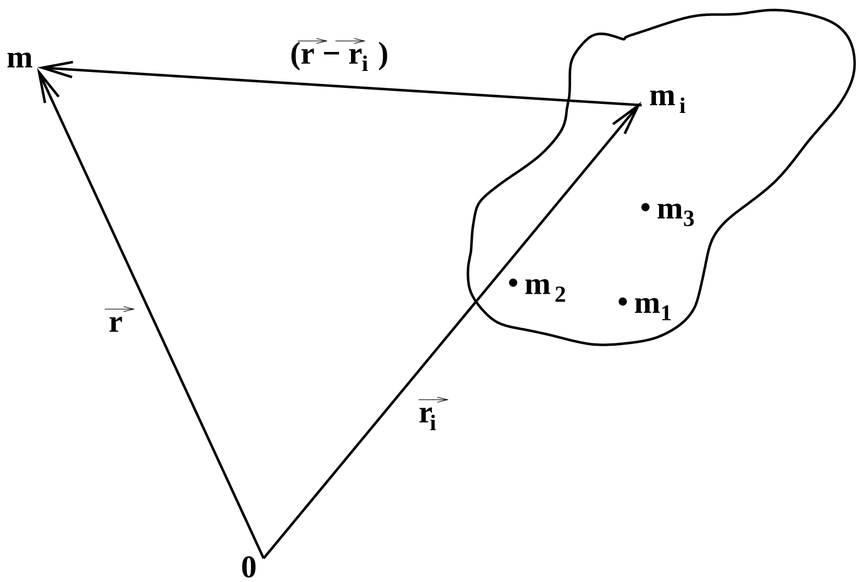

Abbildung 58:

Ist m_2 eine Masse mit dem Volumen V und der Dichte ρ, so geht die Summe in ein Integral über:

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = -\gamma \cdot m \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d\tau' \tag{84}$$

Um die Gravitationskraft unbhängig von der Probemasse m zu machen, definieren wir als Gravitationsfeld:

$$\vec{g}(\vec{r}) \ \underline{\text{def}} \ = \frac{\vec{F}_1(\vec{r})}{m} \tag{85}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}(\vec{r} - \vec{r}\,')d\tau' \tag{86}$$

5.2 Gravitationspotential

In einem zentralen und konservativen Kraftfeld einer Massenverteilung (Massenpunkte oder kontinuierlich) hat ein Teilchen der Masse m die potentielle Energie

$$U_1(r) = -\gamma \cdot m \cdot \sum \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{87}$$

oder allgemeiner:

$$U_i(r) = -\gamma \cdot m \cdot \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}d\tau' \tag{88}$$

Analog zum Gravitationsfeld definieren wir als <u>“Gravitationspotential“</u> potentielle Energie pro Einheitspunktmasse:

$$G(r) \ \underline{\text{def}} \ = \frac{U(r)}{m} = -\gamma \cdot \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}d\tau' \tag{89}$$

5.3 Feldgleichungen

Zur Herleitung der Feldgleichungen für das Gravitationsfeld (später auch für elektrische und magnetische Felder) sind zwei fundamentale Integralsätze von Bedeutung:

1. **Gauß'scher Satz:**
   Für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{g}(\vec{r})$ in einem Volumen V mit der Oberfläche F gilt:

$$\begin{aligned} \int\int_{F_{(V)}} \vec{g}(\vec{r})d\vec{f} \ &= \ \int_V div\,\vec{g}(r)d\tau \\ &= \ \int \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r})d\tau \end{aligned} \tag{90}$$

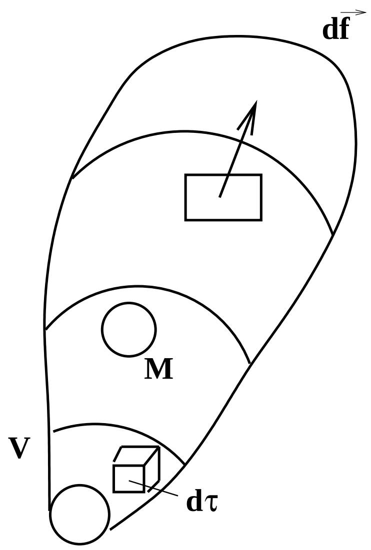

Abbildung 59: $d\tau$ = Volumenelement; $d\vec{f}$ = Flächenelement (gerichtet in Normalrichtung nach außen); $\int\int_{F_{(V)}} \ldots df$ = Integral über die Fläche, die V umschließt

Mit dem Gauß'schen Satz werden die Eigenschaften eines Vektorfeldes $\vec{g}(\vec{r})$ (z.B. des Gravitationsfeldes) im Innern eines beliebigen Volumens mit denen des Feldes auf der Oberfläche verknüpft.

2. **Stokes'scher Satz:**
Gegeben ist eine Kurve c, deren Umlaufsinn bekannt ist. Über diese Kurve c wird eine Fläche F gelegt, die c als Rand hat. (Man kann sich das vorstellen, wie eine Seifenblase kurz vor dem Ablösen von der Drahtschlinge, oder wie ein Schmetterlingsnetz, das an einem Drahtbügel befestigt ist.)

$$\oint_c \vec{g}(\vec{r}) d\vec{\ell} = \int\int_{F_{(e)}} \big(rot\, \vec{g}(\vec{r})\big) d\vec{f} = \int\int_{F_{(e)}} \big(\vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{r})\big) d\vec{f} \quad (91)$$

$$rot\, \vec{g}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} g_z - \frac{\partial}{\partial z} g_y \\ \frac{\partial}{\partial z} g_x - \frac{\partial}{\partial x} g_z \\ \frac{\partial}{\partial x} g_y - \frac{\partial}{\partial y} g_x \end{pmatrix}$$

Aus dem Stokes'schen Satz geht hervor, dass $\int\int_F rot\, \vec{g} d\vec{f}$ <u>unabhängig</u> von der Form und der Größe der Fläche F ist und <u>nur</u> vom <u>Rand</u> dieser Fläche abhängt.

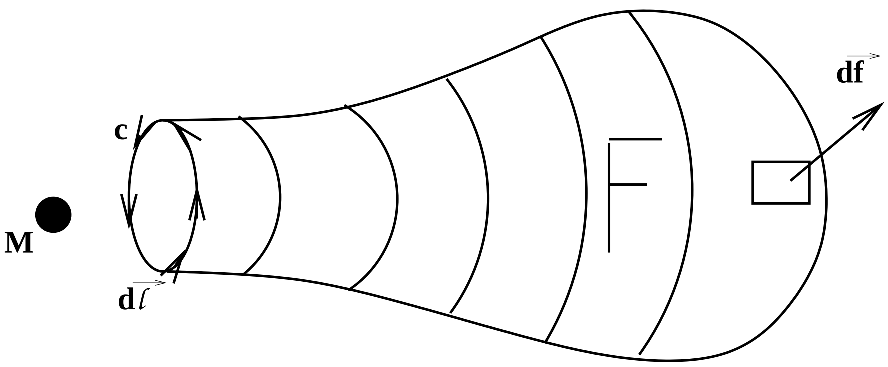

Abbildung 60: $\oint_c \ldots d\vec{\ell}$ = geschlossenes Linienintegral über die Kurve c; $d\vec{\ell}$ = Linienelement von c; $\int\int_{F_{(c)}} \ldots d\vec{f}$ = Integral über die Fläche F mit dem Rand c

Satz 1:
Es gilt stets für das Gravitationsfeld:

$$rot\,\vec{g}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{r}) = 0 \tag{92}$$

Beweis:
Wir möchten diesen Satz auf zwei Arten beweisen.

a) Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes:

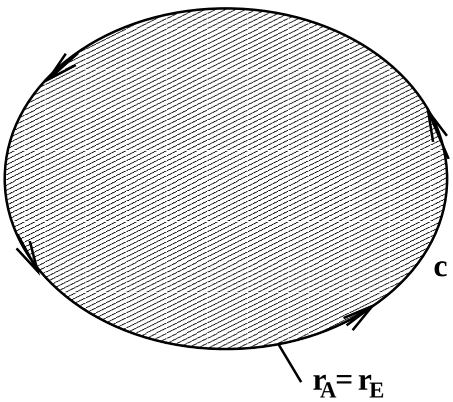

Abbildung 61:

$$\int\int_{F_{(e)}} rot\,\vec{g}(\vec{r})d\vec{r}\ \underline{\text{Stokes}}\ = \oint_c \vec{g}(\vec{r})d\vec{\ell}$$

Nach (85) ist $\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}G(\vec{r})$
Nach (83) ist $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(r) \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}G(\vec{r})$
Nach (89) ist $U(r) = m \cdot G(r) \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}G(\vec{r})$

$$\begin{aligned}
\int\int_F \vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{r})d\vec{f} &= \oint_c \vec{g}(\vec{r})d\vec{\ell} \\
= -\oint_c \vec{\nabla}G(\vec{r})d\vec{\ell} &= \Big[G(r)\Big]_{r_A}^{r_E} \\
\text{da aber}\, r_A &= r_E ist \Rightarrow \\
\int\int_F \vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{r})d\vec{f} &= G(r_E) - G(r_A) = 0
\end{aligned}$$

Da dies für jede Größe und Orientierung der Fläche F gilt, ist auch der Integrand $rot\,\vec{g}(\vec{r}) = 0$.

b) Durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
rot\,g(r) &= -\vec{\nabla} \times \big(\vec{\nabla}G(r)\big) = -(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})G(r) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \big(G(r)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Z.B. 1. Zeile: $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}G - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}G = 0$ usw.

Da $G(r) = -\gamma \cdot \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau$, sind alle gemischten zweiten Ableitungen der Funktion G stetige Funktionen, also auch vertauschbar.

$$rot\,\vec{g}(\vec{r}) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Satz:
Das Gravitationspotential erfüllt die Poisson-Gleichung:

$$\Delta G(r) = 4\pi\gamma \cdot \rho(\vec{r}) \tag{93}$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = div\, grad = \text{Laplace-Operator}$$

Beweis:
Ein Massepunkt der Masse m_i am Ort $\vec{r}_i$ hat das Kraftfeld:

$$\vec{g}_i(\vec{r}) = -\gamma \cdot \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Massepunkt m_i, so ist $\vec{r}_i = 0$:

$$\vec{g}_i(\vec{r}) = -\gamma \cdot m_i \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} = -\gamma \cdot m_i \frac{1}{r^2}\hat{r}$$

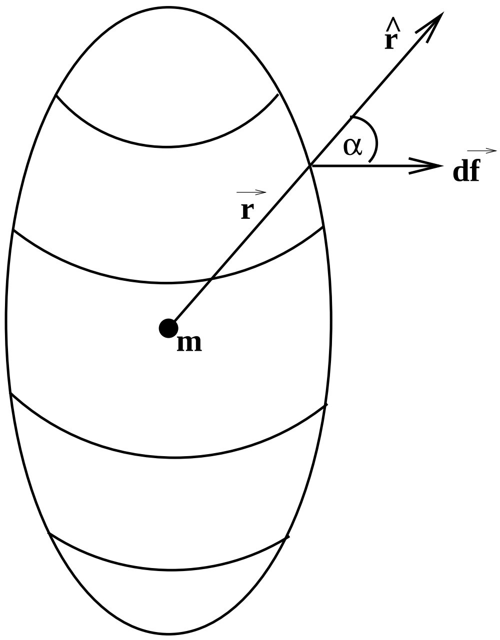

Abbildung 62:

Wir legen um m_i ein beliebiges Volumen mit der Oberfläche F mit beliebiger Form und bilden das Oberflächenintegral:

$$\int\int_F \vec{g}_i(\vec{r})d\vec{f} = -\gamma m_i \int\int_F \frac{1}{r^2}\cdot\hat{r}\cdot d\vec{f}$$

Durch das Skalarprodukt $\hat{r}\cdot d\vec{f} = |\hat{r}|\cdot|d\vec{f}|\cdot\cos\alpha$ mit $\alpha\measuredangle(\hat{r},d\hat{f})$, kommt nur der Teil von $d\vec{f}$ zur Geltung, der parallel zu $\hat{r}$ steht. Diesen Teil nennen wir $d\vec{f'}$. Es gilt:

$$|d\vec{f'}| = |df|\cdot\cos\alpha$$

Gleichzeitig ist aber $|d\vec{f'}| = r^2\cdot\sin\vartheta\, d\theta d\phi$ (in Polarkoordinaten), so folgt:

$$\begin{aligned}
\int\int_F \vec{g}_i(\vec{r})d\vec{f} &= -\gamma m_i \int\int_F \frac{1}{r^2}\cdot\underbrace{|\hat{r}|}_{=1}\cdot\underbrace{r^2\cdot\sin\vartheta\cdot d\phi d\vartheta}_{df\cdot\cos\alpha} \\
&= -\gamma\cdot m_i 2\pi\cdot\int_0^n \sin\vartheta\, d\vartheta = -\gamma\cdot m_i 2\pi\cdot 2 \\
&= -4\pi\gamma\cdot m_i
\end{aligned}$$

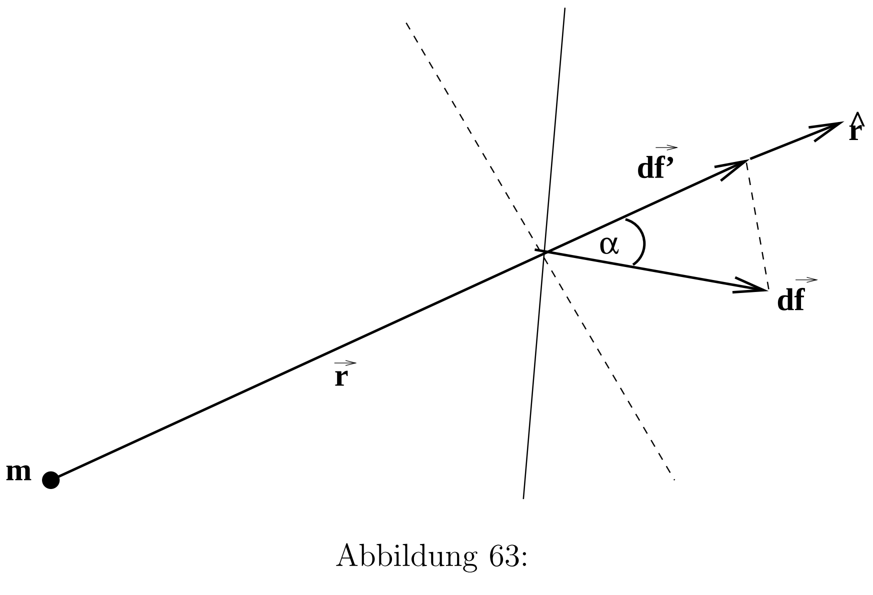

Abbildung 63:

Wenn m_i außerhalb der Fläche liegt, tritt $\vec{r}$ mindenstens zwei Mal durch die Fläche. Da beim Ein- und Austritt der Winkel α einmal stumpf und einmal spitz ist, der $\cos\alpha$ also abwechselnd positiv oder negativ wird, heben sich die Anteile $\vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{f}$ beim Integrieren über die gesamte Fläche gegeneinander auf. Also ist:

$$\begin{aligned}
\int\int_F \vec{g}_i(\vec{r})d\vec{f}) &= -4\pi\gamma m_i && m_i \text{ innerhalb der Fläche} \\
\int\int_F \vec{g}_i(\vec{r})d\vec{f} &= 0 && m_i \text{ außerhalb}
\end{aligned}$$

Hat man statt eines einzelnen Massepunktes eine Massenverteilung, so ist m_i durch $\int_V \rho(r')d\tau$ zu ersetzen:

$$\int\int_F \vec{g}(\vec{r})d\vec{f} = -\gamma\cdot 4\pi\cdot\int_V \rho(\vec{r})d\tau$$

Nach dem Gauß'schen Satz ist:

$$\begin{aligned}
\int\int_F \vec{g}(\vec{r})df &= \int_V div\,\vec{g}(\vec{r})d\tau \Rightarrow \\
-\gamma\cdot 4\pi\cdot\int_V \rho(\vec{r})d\tau &= \int_V \underbrace{div\,\vec{g}(\vec{r})}_{\vec{\nabla}\vec{g}} d\tau \Rightarrow \\
\int_V \big(\vec{\nabla}\vec{g}(\vec{r}) &+ \gamma\cdot 4\pi\rho(\vec{r})\big)d\tau = 0
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige Volumen V erfüllt ist, muss der Integrand stets Null sein.

$$\vec{\nabla}\vec{g}(\vec{r}) = div\,\vec{g}(\vec{r}) = -4\pi\cot\gamma\rho(\vec{r})$$

Da $\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}G(r)$ war:

$$\begin{aligned}
-div\,\vec{\nabla}G &= -4\pi\cdot\rho(\vec{r}) \Leftrightarrow \\
\Delta G = \vec{\nabla}\vec{\nabla}G &= 4\pi\gamma\cdot\rho(\vec{r})
\end{aligned}$$

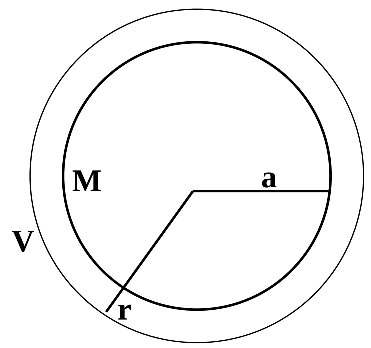

Abbildung 64: a = Radius der homogenen Kugel ($\rho = const.$) mit der Masse $M = \int_V \rho d\tau$; V = Volumen (Kugel) mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Mittelpunkt der Massenverteilung

5.4 Beispiele

1. Beispiel:
Homogene Kugel mit Radius a (z.B. Erde)
Die Poissongleichung lautet:

$$\Delta G(r) = -\vec{\nabla}\vec{g}(\vec{r}) = +4\pi\gamma \cdot \rho(\vec{r})$$

Da das Problem kugelsymmetrisch ist, ist $\vec{g}$ nur eine Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt. Wir legen um die Erdkugel ein (Kugel-)Volumen V mit der Oberfläche F. Durch Integration über das Volumen V folgt

$$\int_V \vec{\nabla}\vec{g}(|\vec{r}|)d\tau = -4\pi\gamma \int_V \rho(\vec{r})d\tau \tag{94}$$

a) **Fall** $r > a$**:**
Da $\rho(r)$ für $r > a$ gleich Null, ergibt das rechte Integral:

$$-4\pi\gamma \cdot \int_V \rho(\vec{r})d\tau = -4\pi\gamma \cdot M$$

Aus dem Gauß'schen Satz folgt unter der Berücksichtigung, dass $\vec{g}(r)$ bei diesem kugelsymmetrischen Problem immer parallel zu $d\vec{f}$ (einem Flächenstück von F) ist.

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_V \quad \vec{\nabla}\vec{g}(|\vec{r}|)d\tau \underbrace{=}_{Gauß} \int\int_F \vec{g}(r)d\vec{f} \underbrace{=}_{\vec{g}||d\vec{f}} g_r(r)\int\int_F |df| \\
= \quad g_r \quad (r)4\pi r^2 \underbrace{=}_{(94)} -4\pi\gamma \cdot \int_V \rho(\vec{r})d\tau = -4\pi\gamma \cdot M \\
\Leftrightarrow \quad g_r \quad (r) = -\gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r^2}
\end{aligned}
$$

g_r ist die Radialkomponente von $\vec{g}(r)$. In diesem Fall ist $g_r(r) = \pm|\vec{g}(r)|$. $\int\int_F df = 4\pi r^2$, da über die Oberfläche der Kugel mit dem Radius r integriert wird.

b) **Fall $r < a$:**
Da jetzt über eine Kugel integriert wird, die kleiner ist als die homogene Kugel (z.B. Erdkugel), ergibt das Integral

$$
-4\pi\gamma \cdot \int_V \rho(\vec{r})d\tau = -4\pi\gamma \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho(r) = -4\pi\gamma \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho(r)}_{M} \cdot \frac{r^3}{a^3}
$$

Nach (94) ist:

$$
\int_V \vec{\nabla}\vec{g}(r)d\tau = -4\pi\gamma \cdot \int_V \rho(\vec{r})d\tau = -4\pi\gamma M \cdot \frac{r^3}{a^3}
$$

und nach dem Gauß'schen Satz:

$$
\begin{aligned}
\int_V \vec{\nabla}g(r)d\tau \quad \underbrace{=}_{Gauß} \quad \int\int_F \vec{g}(r)d\vec{f} = g_r(r)4\pi r^2 = -4\pi\gamma M\frac{r^3}{a^3} \\
\Leftrightarrow g_r(r) \quad = \quad -\gamma \cdot \frac{M}{a^2} \cdot \frac{r}{a}
\end{aligned}
$$

Das Gravitationsfeld lässt sich darstellen als Gradient des Potentials:

$$
\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}G(r)
$$

Da $\vec{g}$ und G nur von $|\vec{r}|$ abhängen, kann man einfacher schreiben:

$$g_r(r) = -\frac{\partial}{\partial r} G(r)$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man

$$G(r) = -\int_{\infty}^{r} g_r(r) dr$$

Für $r > a$ ist

$$G(r) = -\int_{\infty}^{r} \Big(-\gamma M \cdot \frac{1}{r^2}\Big) dr = -\gamma \frac{M}{r}$$

Für $r < a$ ist

$$\begin{aligned} G(r) &= -\int_{\infty}^{a} \Big(-\gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r^2}\Big) dr - \int_{a}^{r} \Big(-\gamma \frac{M}{a^2} \frac{r}{a}\Big) dr \\ &= -\gamma \cdot \frac{M}{a} \Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \Big) \end{aligned}$$

2. Beispiel:
Hohlkugel mit dem Radius a:

Die Masse der Kugel befindet sich auf einer vernachlässigbar dünnen Schicht auf der Oberfläche (z.B. Weihnachtskugel). Legt man um die Hohlkugel ein (Kugel-)Volumen V mit dem Radius r und der Oberfläche $F = 4\pi r^2$, so ist hier wie beim Beispiel 1:

a) **Fall $r > a$:**

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \vec{g}(r) d\tau \quad & \underbrace{=}_{Gauß} \quad \int\int_F \vec{g}(r) d\vec{f} = g_r(r) \int\int_F df = g_r(r) 4\pi r^2 \\ & \underbrace{=}_{(94)} \quad -4\pi\gamma \cdot \int_V \rho(r) d\tau = -4\pi\gamma \cdot M \\ \Leftrightarrow g_r \quad & = \quad -\gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

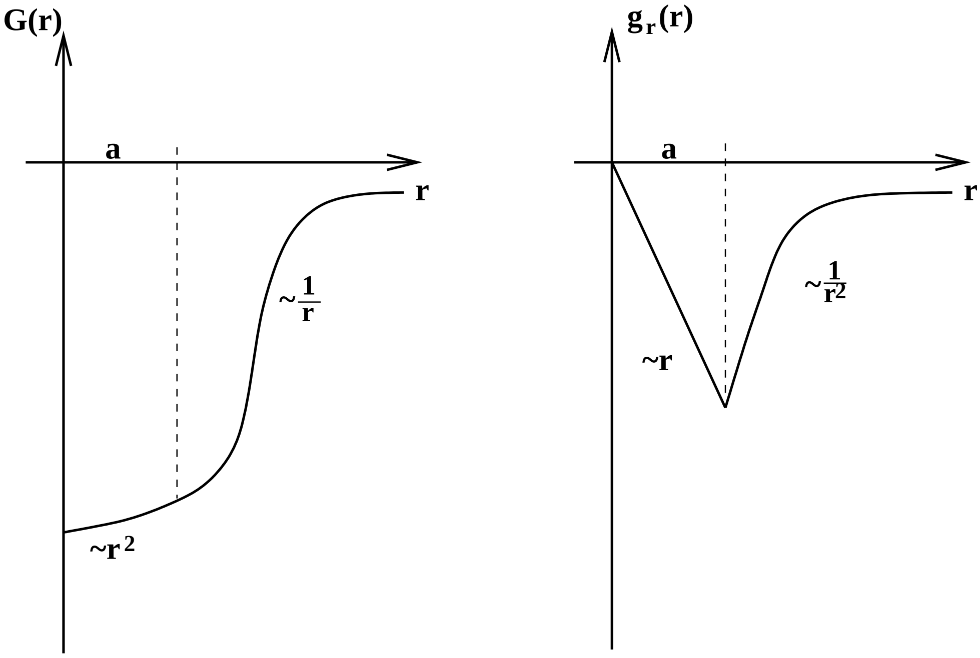

Abbildung 65:

b) **Fall** $r < a$**:**
Das Kraftfeld in der Kugel ist gleich Null, weil sich die gesamte Masse der Hohlkugel außerhalb des Volumens befindet.

$$g_r(r) = 0$$

Das Gravitationspotential erhält man auch hier wieder durch Integration nach dr:

a) **Fall** $r > a$**:**

$$G(r) = -\int_{\infty}^{r} g_r dr = -\gamma \cdot \frac{M}{r}$$

b) **Fall** $r < a$**:**

$$G(r) = -\int_{\infty}^{a} \Big(-\gamma M \frac{1}{r^2} \Big) dr - \underbrace{\int_{r}^{a} (0)\, dr}_{=0} = -\gamma \cdot M \cdot \frac{1}{a}$$

Trägt man $g_r(r)$ und $G(r)$ gegen r auf, so sieht man, dass sich das Feld und das Potential der Hohlkugel nur im Bereich $r < a$ von der homogenen massegefüllten Kugel unterscheiden.

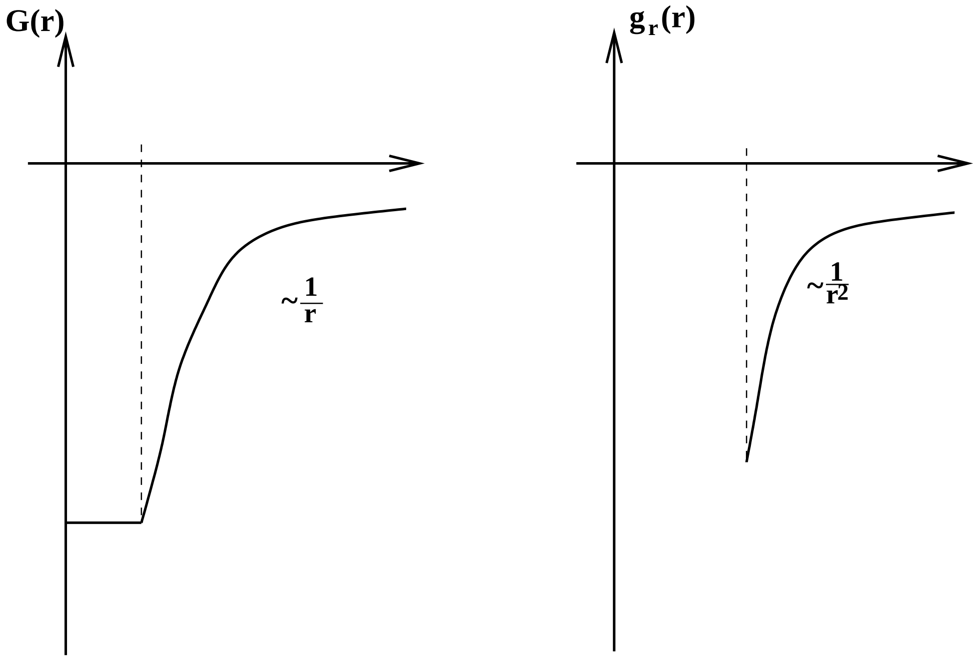

Abbildung 66: