

## 4 Starrer Körper

Ausgearbeitet von Frank-Thomas Lentes und Franz-Josef Herloch

### 4.1 Translation und Rotation des starren Körpers - die Euler-Winkel

Definition:

Ein System von  $N$  Massenpunkten, deren Relativabstände festgelegt sind, nennt man einen starren Körper; es gilt:

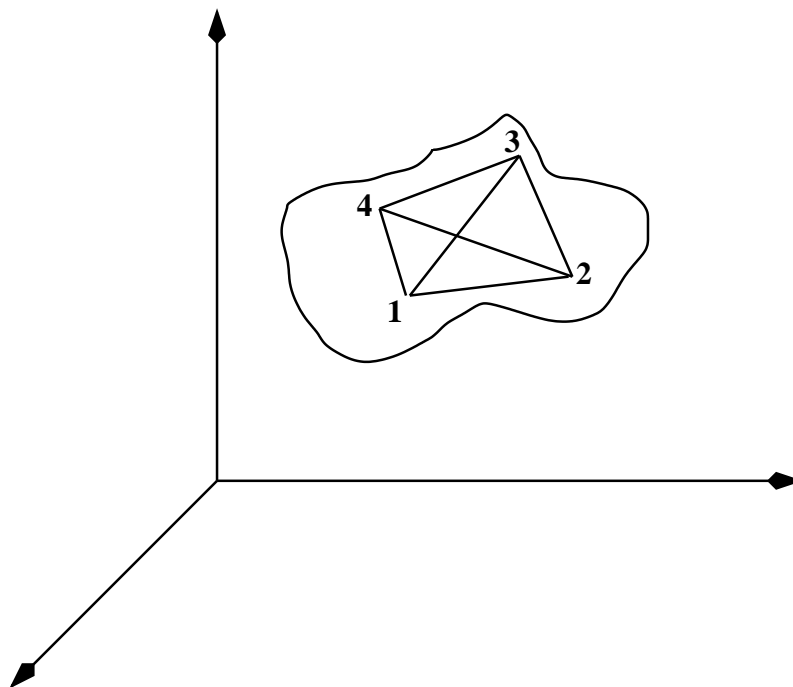


Abbildung 47:

Die Zahl der Freiheitsgrade eines Systems mit  $N$  Massenpunkten beträgt  $3N$ . Beim starren Körper sind diese durch die Zwangsbedingungen immer auf 6 reduziert (z.B.: 4 Massepunkte  $\rightarrow$  12 Freiheitsgrade, 6 starre Verbindungen 'Zwangsbedingungen'  $\rightarrow$  6 Freiheitsgrade). Die 6 Freiheitsgrade spalten sich in je 3 der Translation und Rotation auf. Man benötigt also 6 verallgemeinerte Koordinaten zur vollständigen Beschreibung einer Bewegung des starren Körpers, ausgedrückt durch die Bewegung des körperfesten Koordinatensystems gegenüber dem Laborsystem.

Es gilt:

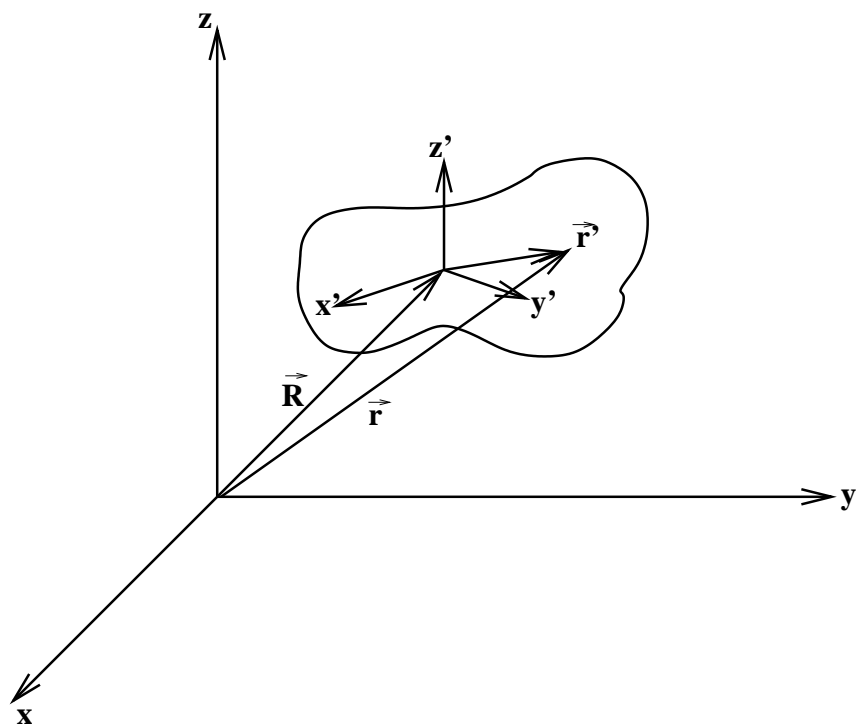


Abbildung 48:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

Dabei ist  $\vec{R}$  der Vektor zum Ursprung des raumfesten zum Ursprung des körperfesten Systems.

I. Translation:

Diese wird durch die Schwerpunktskoordinaten beschrieben.

$$\vec{R}_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

bei kontinuierlicher Massenverteilung:

$$\vec{R}_s = \frac{\int \vec{r} p(\vec{r}) d\tau}{\int p(\vec{r}) d\tau}$$

## II. Rotation (Eulerwinkel):

Man legt der Einfachheit halber die Nullpunkte der beiden Koordinatensysteme zusammen. Jede beliebige Drehung des körperfesten Systems gegenüber dem raumfesten System kann durch 3 nacheinander ausgeführte Rotationen gegeben werden.

- a) Drehung um die  $z$ -Achse um  $\phi$
- b) Drehung um die so erhaltene  $x$ -Achse um  $\vartheta$
- c) Drehung um die  $z'$ -Achse um  $\psi$

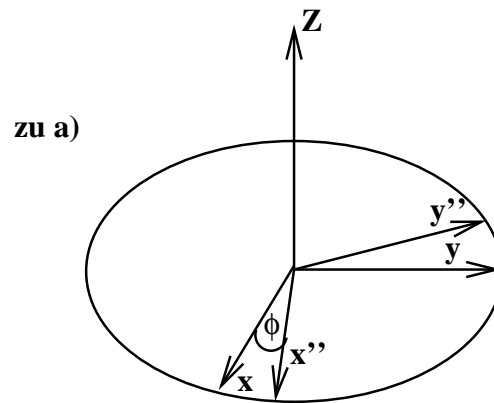


Abbildung 49: zu a)

In Matrixschreibweise gilt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_3 R_2 R_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$R_1$  (Rotation um die  $z$ -Achse)

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \cos \phi x + \sin \phi y + 0z \\ y' = -\sin \phi x + \cos \phi y + 0z \\ z' = z \end{array} \right\} \Rightarrow R_1 = R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die beiden anderen Drehungen erhält man analog

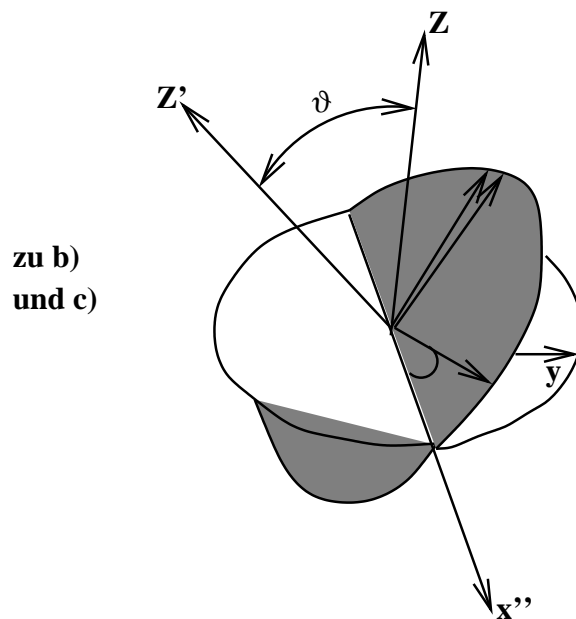


Abbildung 50: zu b) und c)

$$R_2 = R_{\vartheta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$R_3 = R_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Gesamttransformation erhält man durch Matrizenmultiplikation:

$$R_3 R_2 R_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \vartheta \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \cos \vartheta \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \vartheta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \vartheta \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \vartheta \cos \psi \cos \phi & \cos \phi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \phi & -\sin \vartheta \cos \phi & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

### III. Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System

Diese setzen sich aus den Projektionen von  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\psi}$  und  $\dot{\vartheta}$  auf die Koordinatenachsen des körperfesten Systems zusammen.

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

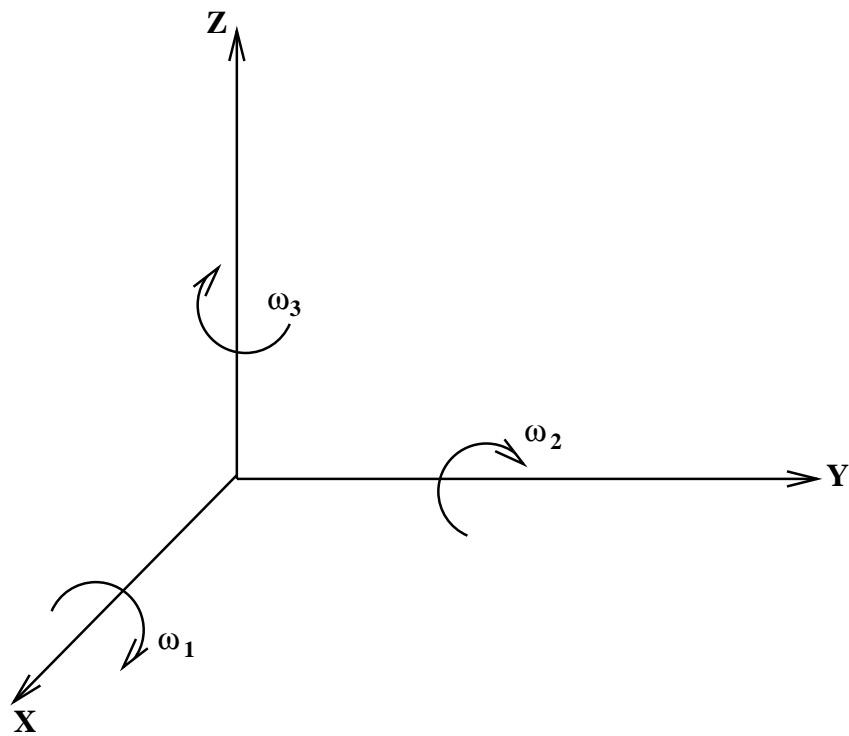


Abbildung 51:

a)

$$\dot{\psi}_{x'} = \dot{\psi}_{y'} = 0; \quad \dot{\psi}_{z'} = \dot{\psi}$$

$\psi$  wurde als Drehung um die  $z'$ -Achse eingeführt.

b)

$$\dot{\vartheta}_{z'} = 0; \quad \dot{\vartheta}_{x'} = \dot{\vartheta} \cos \psi; \quad \dot{\vartheta}_{y'} = -\dot{\vartheta} \sin \psi$$

c)

$$\dot{\phi}_{z'} = \dot{\phi} \cos \vartheta; \quad \dot{\phi}_{x'} = \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \phi; \quad \dot{\phi}_{y'} = \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \phi$$

Damit ergibt sich für

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

#### IV. D'Alembert'sches Prinzip

Wir suchen nun die Bewegungsgleichungen des starren Körpers im Laborsystem (Inertialsystem), wo die Newton'schen Bewegungsgleichungen gelten. Dazu wird das d'Alembert'sche Prinzip benutzt:

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}\sum_i \tilde{F}_i \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \text{weiter: } m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i + \tilde{\vec{F}}_i \\ \Rightarrow \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0\end{aligned}$$

Zwei  $\delta \vec{r}_i$  sind möglich, die mit den Nebenbedingungen des starren Körpers verträglich sind: Translation und Rotation.

##### 1. Translation:

$$\begin{aligned}\delta \vec{r}_i &= \vec{\epsilon} \\ \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \vec{\epsilon} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{\epsilon} \cdot \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \vec{\epsilon} \cdot \sum_i \tilde{\vec{F}}_i\end{aligned}$$

Wir definieren die resultierende Kraft:

$$\vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i$$

Und die Schwerpunktskoordinate:

$$\begin{aligned}\vec{R}_s &= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}; \quad \sum_i m_i = M \\ \Rightarrow M \ddot{\vec{R}}_s &= \vec{k}_{rs}\end{aligned}$$

Der starre Körper bewegt sich so, als ob die gesamte  $\vec{k}_{res}$  an  $\vec{R}_s$  angreifen würde.

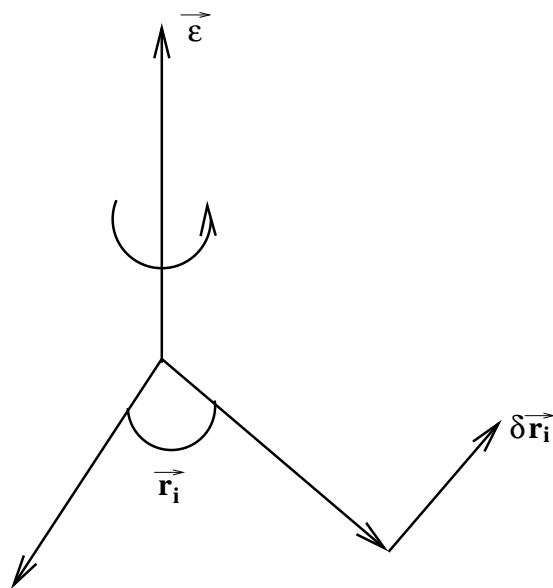


Abbildung 52:

## 2. Rotation:

Wir rotieren den starren Körper um  $\vec{\epsilon}$ .

Es gilt:

$$\delta \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \times \vec{r}_i$$

Man erhält: (Spatprodukt)

$$(\vec{\epsilon} \times \sum_i \vec{r}_i) \cdot (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) = 0$$

Zyklische Vertauschung liefert:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon} \cdot \sum \left( (\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) m_i - \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) &= 0 \\ \text{da } \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i), \text{ folgt:} \\ \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M} \\ \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{J} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{J}} = \vec{M}$$

i.W.: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment.

### Reine Rotation des starren Körpers:

Wie bereits erklärt, ist

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i \text{ bzw. } \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

Für  $\vec{R} = 0$  ergibt sich:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i \text{ bzw. } \dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

Damit erhält man:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)$$

Da gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c},$$

folgt:

$$J = \sum_{i=1}^N [m_i r_i'^2 \vec{\omega} - m_i \vec{r}'_i (\vec{r}'_i \vec{\omega})]$$

Für die  $k$ -te Komponente von  $\vec{J}$  erhält man:

$$\text{beachte: } \sum_{\ell=1}^3 \delta_{k\ell} = 1$$

$$J_k = \sum_{i=1}^N m_i \left( r_i'^2 \sum_{\ell=1}^3 \delta_{k\ell} \omega_\ell - x'_{ik} \sum_{\ell=1}^3 x'_{i\ell} \omega_\ell \right)$$

folgt:

$$J_k = \sum_{i=1}^N m_i \left( r_i'^2 \sum_{\ell=1}^3 \delta_{k\ell} \cdot \omega_\ell - x'_{ik} \sum_{\ell=1}^3 x'_{i\ell} \omega_\ell \right)$$

Allgemein ist

$$J = \Theta \vec{\omega} \text{ oder } J_k = \sum_{\ell=1}^3 \Theta_{k\ell} \omega_\ell$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man: - Trägheitstensor -

$$\Theta_{k\ell} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i'^2 \delta_{k\ell} - x'_{ik} x'_{i\ell})$$

Bei kontinuierlicher Massenverteilung hat man

$$\begin{aligned} \Theta_{k\ell} &= \int \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{k\ell} - x_k x_\ell) d\tau \\ \Theta_{xx} &= \int \rho(\vec{r}) (y^2 + z^2) d\tau \\ \Theta_{xy} &= - \int \rho(\vec{r}) xy d\tau \end{aligned}$$

Die Diagonalelemente  $\Theta_{kk}$  nennt man Trägheitsmomente, die Außerdiagonalelemente Deviationsmomente. Jeder symmetrische Tensor kann auf Hauptachsen transformiert werden, d.h. er kann durch Rotation auf Diagonalform gebracht werden. ( $A, B, C =$  Hauptträgheitsmomente).

$$R\Theta R^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Wir wählen die Koordinatenachsen des körperfesten Systems so, dass sie parallel zu den Hauptträgheitsachsen sind; dann ist der Trägheitstensor diagonal, und es gilt:

$$J_{x'} = A \cdot p; \quad J_{y'} = B \cdot q; \quad J_{z'} = C \cdot r$$

Berechnung der Rotationsenergie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 \text{ mit: } \dot{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

benutze  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k,\ell=1}^3 m_i (r_i'^2 \delta_{k\ell} - r'_{ik} r'_{i\ell}) \omega_k \omega_\ell$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^3 \Theta_{k\ell} \omega_k \omega_\ell$$

Nach Diagonalisierung hat man

$$T = \frac{1}{2} A p^2 + \frac{1}{2} B q^2 + \frac{1}{2} C r^2$$

Rotation und Translation:

$$\dot{r}_i = \dot{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Einsetzen in  $T$  liefert:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{R}^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^3 \omega_k \Theta_{k\ell} \omega_\ell}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \dot{R} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{\substack{\dot{r} \cdot \omega \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \\ M \cdot \vec{R}'_s}}$$

Wähle  $\vec{R}'_s = 0$ , d.h. Nullpunkt des körperfesten Systems. Dann erhält man:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \Theta_{k\ell} \omega_k \omega_\ell$$

## 4.2 Die Euler'schen Gleichungen

Die bisherigen Bewegungsgleichungen gelten nur für das Laborsystem. Die zeitlichen Änderungen von Impuls und Drehimpuls sind auf dieses ruhende System bezogen.

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M} \text{ und } M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{res}$$

Wir leiten nun die Bewegungsgleichungen im körperfesten System her. Dabei wollen wir uns auf reine Rotation beschränken. Für den Zusammenhang zwischen der Änderung eines Vektors im Laborsystem und im körperfesten gilt:

$$(d\vec{a})_L = (d\vec{a})_K + d\vec{\phi} \times \vec{a}$$

bzw. für zeitliche Änderung:

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_L = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_K + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

Da dies für jeden beliebigen Vektor gilt, ergibt sich für den Drehimpuls:

$$\left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_L = \vec{M} = \left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_K + \vec{\omega} \times \vec{J}$$

(Eulersche Gleichung)

Bewegungsgleichung im bewegten Bezugssystem.  $M$  kann nach jedem beliebigen System zerlegt werden. Unter der Voraussetzung, dass das körperfeste System durch die Hauptträgheitsachsen festgelegt ist, gilt:

$$J_{x'} = A \cdot p; \quad J_{y'} = B \cdot q; \quad J_{z'} = C \cdot r$$

In Komponentenschreibweise gilt:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)r\dot{q} &= M_{x'} \left\{ \left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_K = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}; \vec{\omega} \times \vec{J} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{h} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{bmatrix} \right\} \\ B\dot{q} + (A - C)p\dot{r} &= M_{y'} \left\{ \left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_K = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}; \vec{\omega} \times \vec{J} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{h} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{bmatrix} \right\} \\ C\dot{r} + (B - A)p\dot{q} &= M_{z'} \end{aligned}$$

Beispiel: Freie Rotation ( $\vec{M} = 0$ )

Die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\begin{array}{l|ll} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 & \text{“Energiesatz“} & \text{“Drehimpulssatz“} \\ B\dot{q} + (A - C)pr = 0 & \cdot p & \cdot Ap \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 & \cdot q & \cdot Bq \\ & \cdot r & \cdot Cr \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort der Energiesatz, wenn diese gemäß o.a. Vorschrift behandelt und addiert werden:

$$\begin{aligned} A\dot{p}\dot{p} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{r}\dot{r} &= 0 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)}_{\text{Rotationsenergie}} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Analog erhält man den Drehimpulssatz:

$$\begin{aligned} A^2 p\dot{p} + B^2 q\dot{q} + C^2 r\dot{r} &= 0 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2) \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} (A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2)}_{J^2 = \text{const. (Betrag des Drehimpulses zum Quadrat = konstant.)}} &= \text{const.} \end{aligned}$$

### Stabilität der Rotation

#### **Behauptung:**

Die Rotationen um die Achsen größten und kleinsten Trägheitsmomentes sind stabil.

#### **Beweis:**

Wir betrachten die Rotation eines drei-achsigen Ellipsoides um die  $x'$ -Achse im körperfesten System und lassen kleine Abweichungen zu. Für die Komponenten von  $\vec{\omega}$  soll gelten:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \pi \\ q &= 0 + \epsilon \\ r &= 0 + \rho \end{aligned}$$

( $\pi, \epsilon, \rho$  sind kleine Abweichungen im Sinne der kleinen Schwingungen.)

$$\begin{aligned}
A\dot{p} + (C - B)qr &= 0 \\
B\dot{q} + (A - C)rp &= 0 \\
C\dot{r} + (B - A)pq &= 0
\end{aligned}$$

Entwicklung der Euler'schen Gleichungen bis zur ersten Ordnung in  $\pi$ ,  $\epsilon$ ,  $\rho$  liefert:

$$A\dot{\pi} == (\text{da } q_0 = r_0 = 0) \quad (75)$$

$$B\dot{\epsilon} + (A - C)p_0\rho = 0 \quad (76)$$

$$C\dot{\rho} + (B - A)p_0\epsilon = 0 \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{B - A}{C}p_0\epsilon \quad (77)$$

Differenzieren von (76) gibt:

$$B\ddot{\epsilon} + (A - C)p_0\dot{\rho} = 0$$

Einsetzen von  $\dot{\rho}$  liefert:

$$B\ddot{\epsilon} + (A - C)p_0\frac{A - B}{C}p_0\epsilon = 0$$

oder:

$$\ddot{\epsilon} + \left(\frac{A - C}{B}\right)\left(\frac{A - B}{C}\right)p_0^2\epsilon = 0$$

Aus der Theorie der Schwingungen ist bekannt, dass

$$\omega_0^2 = \left(\frac{A - C}{B}\right)\left(\frac{A - B}{C}\right)p_0^2$$

Man erhält stabile Lösungen, d.h. kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage, wenn  $\omega_0^2 > 0$ . Daraus folgt:  $A > C, B$  oder  $A < C, B$ . Daher muss  $A$  das größte oder kleinste Hauptträgheitsmoment sein.

Spezialfall:

Der symmetrische Kreis ( $A = B \neq C$ ).

Die Euler'schen Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= 0 \\ A\dot{q} + (A - C)rp &= 0 \\ Cr &= 0 \Rightarrow r = \text{const.} = r_0 \end{aligned}$$

(Winkelgeschwindigkeit um  $z'$ -Achse konstant)

Setze  $\frac{C-A}{A}r_0 = \omega_0$ , damit folgt:

$$\begin{aligned} \dot{p} + \omega_0 q &= 0 \\ \dot{q} - \omega_0 p &= 0 \quad | \cdot i \end{aligned}$$

Addition ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p + iq) - i\omega_0(p + iq) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(p + iq) &= i\omega_0(qi + p) \end{aligned}$$

Setze  $p + iq = Ae^{i\omega_0 t}$ , damit erhält man:

$$\begin{aligned} p &= A \cos \omega_0 t \\ q &= A \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Dabei wird  $A$  als reell angenommen, das bedeutet eine bestimmte Wahl des Nullpunktes zur Zeit  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} p(0) &= A = p_0 \\ q(0) &= 0 \end{aligned}$$

Daher lautet die Lösung:

$$\begin{aligned}
 p &= p_0 \cos \left[ \left( \frac{C-A}{A} r_0 \right) t \right] \\
 q &= p_0 \sin \left[ \left( \frac{C-A}{A} r_0 \right) t \right]
 \end{aligned}$$

Die Projektion von  $\vec{\omega}$  auf die  $x'$ -,  $y'$ -Ebene rotiert dort mit der Frequenz

$$\omega_0 = \frac{C-A}{A} r_0;$$

wobei deren Betrag konstant bleibt:

$$\sqrt{p^2 + q^2} = p_0$$

Da  $r = r_0$  ebenfalls konstant ist, rotiert  $\vec{\omega}$  gleichmäßig um die Figurenachse  $z'$ . Weil im Hauptachsensystem

$$J_{x'} = Ap \text{ und } J_{y'} = Aq \text{ und } J_{z'} = Cr_0$$

sind, führt also  $\vec{J}$  dieselbe Bewegung um die Figurenachse aus:

Die Präzessionsfrequenz umso kleiner, je kleiner die Differenz der beiden Hauptträgheitsmomente ist. Im raumfesten System rotiert der Kreisel um die Drehimpulsachse (reguläre Präzession).

### 4.3 Der Schwere symmetrische Kreisel

Symmetrischer Kreisel mit zusätzlichem Drehmoment. Der Kreisel befinde sich im Schwerfeld, wobei ein Punkt auf der  $z'$ -Achse, der nicht der Schwerepunkt ist, festgehalten wird. Die Lösung erfolgt mit Hilfe der Lagrange-Gleichung II. Art.

$$\begin{aligned}
 L &= T - U \\
 U &= mgl \cos \vartheta = W \cos \vartheta \\
 T &= \frac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2
 \end{aligned}$$

(im körperfesten System, auf Hauptachsen transformiert)

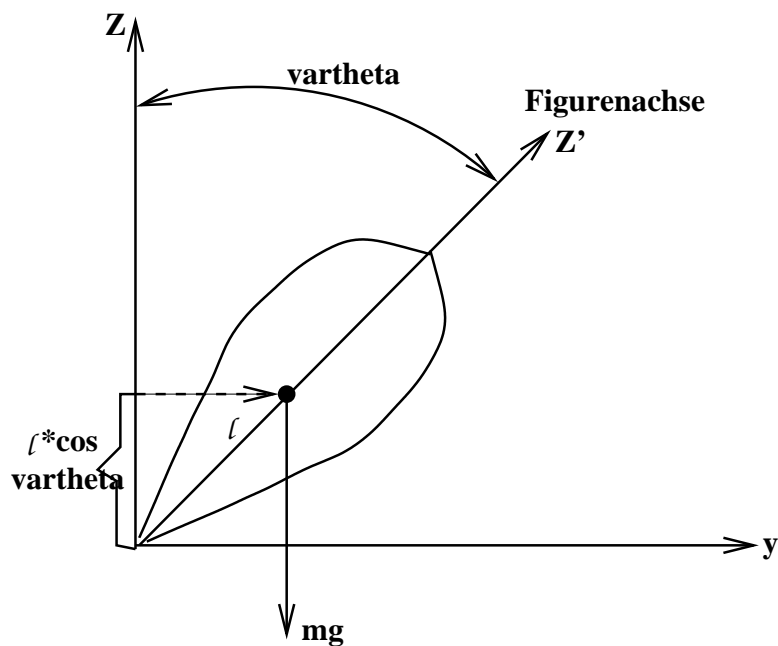


Abbildung 53:  $A = B \neq C$

$p, q, r$  werden wie bekannt durch die Eulerwinkel ausgedrückt.

$$\begin{aligned} p &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi \\ q &= -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi \\ r &= \dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Einsetzen in  $T$  liefert:

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2}C(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - W \cos \vartheta$$

$\phi$  und  $\psi$  kommen in  $L$  nicht vor; deshalb gibt es zwei Konstanten der Bewegung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const.} = p_{\phi} = A \sin^2 \vartheta \dot{\phi} + C(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \cos \vartheta \quad (78)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{const.} = P_{\psi} = C(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \quad (79)$$

Statt der Lagrange-Gleichung für  $\vartheta$  und  $\dot{\vartheta}$ , benutzen wir den Energiesatz:

$$E = T + U = \frac{1}{2}A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2}C(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + W \cos \vartheta$$

a) Mit Hilfe von  $P_\varphi$  und  $P_\psi$  werden  $\dot{\phi}$  und  $\dot{\psi}$  eliminiert:

$$\begin{aligned} P_\varphi &= A \sin^2 \vartheta \dot{\phi} + C \cos^2 \vartheta \dot{\phi} + C \cos \vartheta \dot{\psi} & \Big| & \cdot - \cos \vartheta \\ P_\psi &= C \cos \vartheta \dot{\phi} + C \dot{\psi} & \Big| & \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= \frac{P_\varphi - \cos \vartheta P_\psi}{A \sin^2 \vartheta} \\ \dot{\psi} &= \frac{P_\psi}{C} - \cos \vartheta \dot{\phi} \end{aligned}$$

Einsetzen in  $E$  liefert:

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 + \frac{(P_\varphi - \cos \vartheta P_\psi)^2}{2A \sin^2 \vartheta} + \frac{(P_\psi)^2}{2C} + W \cos \vartheta$$

Damit ergibt sich für

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{2}{A} \left[ E - \frac{(P_\varphi - \cos \vartheta P_\psi)^2}{2A \sin^2 \vartheta} - \frac{P_\psi^2}{2C} - W \cos \vartheta \right]$$

Da  $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$  bzw.  $dt = \frac{d\vartheta}{\dot{\vartheta}}$  ist, folgt:

$$t - t_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{2}{A} \left[ E - \frac{(P_\varphi - \cos \vartheta P_\psi)^2}{2A \sin^2 \vartheta} - \frac{P_\psi^2}{2C} - W \cos \vartheta \right] \right\}^{-1/2} d\vartheta$$

Damit hat man  $t - t_0 = F(\vartheta)$  bzw.  $\vartheta = F^{-1}(t - t_0)$ . Analog erhält man aus  $P_\varphi$  und  $P_\psi$  entsprechende Gleichungen für  $\phi$  und  $\psi$ .

b)

$$\begin{aligned}P_\varphi &= A \sin^2 \vartheta \dot{\phi} + P_\psi \cos \vartheta \quad (P_\varphi \text{ benutzt}) \\ \dot{\phi} &= \frac{P_\varphi - P_\psi \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta} \\ \Rightarrow \phi - \phi_0 &= \int_{t_0}^t \frac{P_\varphi - \cos \vartheta P_\psi}{A \sin^2 \vartheta} dt\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}P_\psi &= C(\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \\ \dot{\psi} &= \frac{P_\psi}{C} - \dot{\phi} \cos \vartheta \\ \Rightarrow \psi - \psi_0 &= \int_{t_0}^t \left( \frac{P_\psi}{C} - \dot{\phi} \cos \vartheta \right) dt\end{aligned}$$

## 4.4 Rotierendes Koordinatensystem

### Coriolis Kraft

Im Abschnitt 4.2. wurden die Kreisgleichungen

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M}$$

die im Laborsystem gegeben waren, in das bewegte körperfeste Koordinatensystem transformiert. Dies waren die Euler'schen Gleichungen. Im Folgenden schreiben wir die vollständigen Newton'schen Bewegungsgleichungen in das körperfeste System um. Dazu benutzen wir:

$$\left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right)_L = \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right)_K + (\vec{\omega} \times \vec{a}) \quad (\text{siehe Kapitel 4.2})$$

Im Laborsystem gilt:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Unter Verwendung o.a. Beziehung erhält man:

$$m \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_K + (\vec{\omega} \times \vec{r})_K \right)}_{\text{beliebiger Vektor}} = \vec{F}$$

$$m \underbrace{\left[ \left( \frac{d}{dt} \right)_K + \vec{\omega} \times \right]}_{\text{Operator}} \left\{ \left( \frac{dr}{dt} \right)_K + (\vec{\omega} \times \vec{r})_K \right\} = \vec{F}$$

$$m \left\{ \left( \frac{d^2 r}{dt^2} \right)_K + \vec{\omega} \times \left( \frac{dr}{dt} \right)_K + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})_K + \vec{\omega} \times \left( \frac{dr}{dt} \right)_K + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})_K \right\} = \vec{F}$$

Wir lassen jetzt den Index  $K$  weg, da alle Operationen im körperfesten System auszuführen sind. Damit folgt:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Im rotierenden System treten zu den äußeren Kräften auch noch Scheinkräfte auf:

- $(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r})$ :  
rührt von zeitlichen Änderungen der Winkelgeschwindigkeit her.
- $m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  ist die Zentrifugalkraft. Für den Spezialfall  $\vec{\omega} \perp \vec{r}$  geht sie in die bekannte Form  $m\omega^2 r$  über.
- $-2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) = 2m(\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega})$ : Coriolis-Kraft

Beispiele:

### 1. Windablenkung auf der Erde

In der Meteorologie ist die Coriolis-Kraft für die Linksdrehung der Tiefdrucksystem auf der Nordhalbkugel verantwortlich.

### 2. Fall eines Steines auf die Erde

Man erwartet eine Ablenkung nach Osten; der Stein hat in Abwurfhöhe einen größeren Abstand vom Erdmittelpunkt als an der Erdoberfläche, jedoch die gleiche Winkelgeschwindigkeit. Deshalb ist seine Tangentialgeschwindigkeit am Aufprallort größer als die der Erde. Es gilt:

$$m\ddot{\vec{r}} = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{F}$$

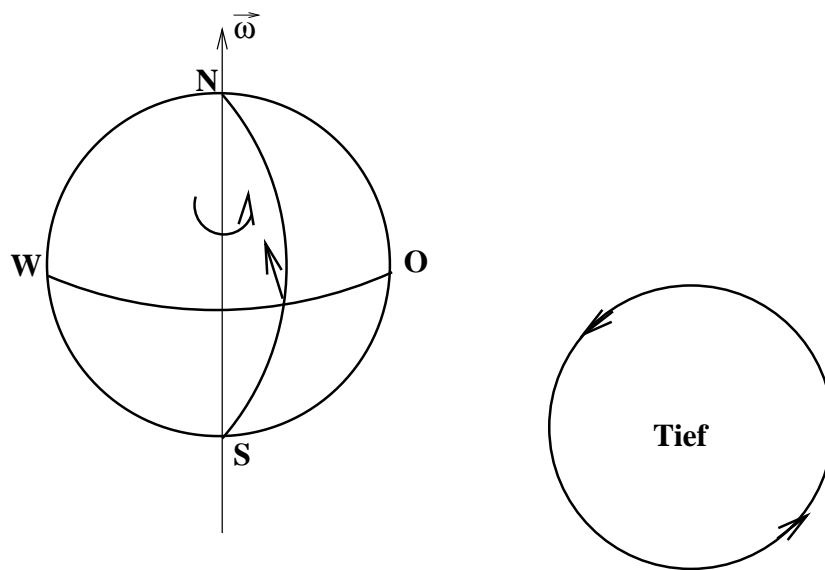


Abbildung 54: Nördliche Halbkugel = Ablenkung nach rechts; Südliche Halbkugel = Ablenkung nach links

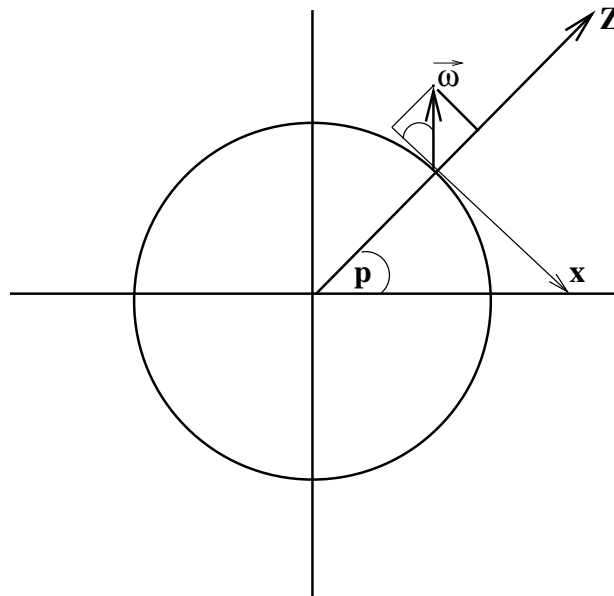


Abbildung 55:

(restliche Terme vernachlässigt)

Zerlegung von  $\vec{\omega}$

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= (-\cos \varphi \cdot \omega, 0, \sin \varphi \cdot \omega) \\
\vec{k} &= (0, 0, -mg) \\
\dot{\vec{r}} &= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\
r_0 &= (0, 0, z_0 = h)
\end{aligned}$$

Die drei Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\omega \dot{y} \sin \varphi \\
\ddot{y} &= -2(\dot{z}\omega \cos \varphi + \dot{x}\omega \sin \varphi) \\
\ddot{z} &= 2(\omega \dot{y} \cos \varphi) - g
\end{aligned}$$

Integriere die 1. und 3. Gleichung

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 2\omega \sin \varphi \cdot y \\
\dot{z} &= 2\omega \cos \varphi \cdot y - gt \\
\Rightarrow \ddot{y} &= -2\omega \cos \varphi (2\omega \cos \varphi \cdot y - gt) - 2\omega \sin \varphi (2\omega \sin \varphi \cdot y)
\end{aligned}$$

Da  $|\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{24h} = 7,29 \cdot 10^{-5} s^{-1}$  (für die Erde) sehr klein ist, verglichen mit der Fallzeit des Steines, können wir in  $\ddot{y}$  die Terme, die quadratisch im  $\omega$  sind, vernachlässigen. Man erhält:

$$\ddot{y} = 2\omega gt \cos \varphi \Rightarrow \dot{y} = \omega gt^2 \cos \varphi \Rightarrow y(t) = \frac{1}{3}\omega g \cos \varphi \cdot t^3$$

Die Integrationskonstanten sind wegen der Anfangsbedingungen alle 0. Die Ablenkung nach Osten ist  $\Delta y = \frac{1}{3}g\omega \cos \varphi \cdot T^3$  ( $T =$  Fallzeit).

Da  $h = \frac{1}{2}gt^2$ , folgt  $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . Eingesetzt erhält man:

$$\Delta y = \frac{1}{3}\omega g \cos \varphi \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

Bei  $h = 100m$  und  $\varphi = 0$  (Äquator)  $\Rightarrow \Delta y = 2cm$ .

### 3. Foucault'sches Pendel

Im Prinzip hat man die Lagrange-Funktion für ein Kugelpendel aufzustellen. Für  $\frac{x}{\ell}$  und  $\frac{y}{\ell} \ll 1$  (langer Faden, kleine Auslenkungen) kann man jedoch die Bewegung allein in der  $x, y$ -Ebene betrachten, die Bewegung in der  $z$ -Richtung ist klein in 2. Ordnung (im Sinne der kleinen Schwingungen). Folgende Gleichung ist zu lösen:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

(konst.  $\omega$  und Zentrifugalkraft vernachlässigt)

Zur Bestimmung von  $\vec{F}$  betrachten wir die beiden Pendelbewegungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung als freie Pendel mit kleinen Amplituden.

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{x}{\ell} \\ \psi &= \frac{y}{\ell}\end{aligned}$$

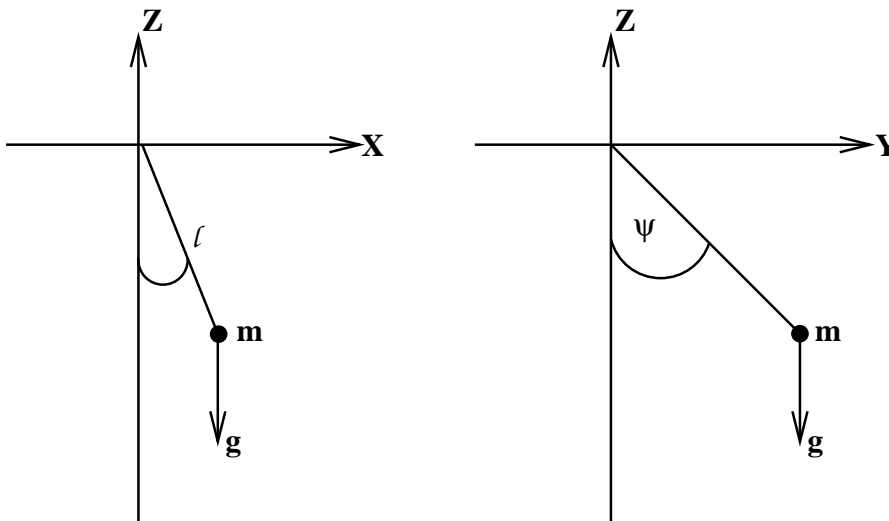


Abbildung 56:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \left(-mg\frac{x}{\ell}, -mg\frac{y}{\ell}, 0\right) \\ \vec{\omega} &= (-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi) \\ \vec{r} &= (x, y, 0) \\ \dot{\vec{r}} &= (\dot{x}, \dot{y}, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{x} &= -g \frac{x}{\ell} + 2\dot{y}\omega \sin \phi \\ \ddot{y} &= -g \frac{y}{\ell} - 2\dot{x}\omega \sin \phi \quad | \cdot i \\ \text{Setze: } z &= x + iy \\ \ddot{z} &= -\frac{g}{\ell}z - 2\omega \sin \phi (i\dot{x} + i^2\dot{y}) \\ \ddot{z} &= -\frac{g}{\ell}z - 2\omega \sin \phi i\dot{z} \end{aligned}$$

Lösungsansatz:

$$Z = Ce^{i\alpha t}$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \frac{g}{\ell} + 2\alpha\omega \sin \phi &= 0 \\ \alpha_{1/2} &= -\omega \sin \phi \pm \sqrt{\omega^2 \sin^2 \phi + \frac{g}{\ell}} \\ \omega^2 \sin^2 \phi \leq \omega^2 &= 53 \cdot 10^{-10} \cdot d^{-2} \ll \frac{g}{\ell} \\ \Rightarrow z_1 &= C_1 e^{-i\omega \sin \phi t + i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \quad \left. \vphantom{z_1} \right\} z = e^{-i\omega \sin \phi t} \{ C_1 e^{i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \} \\ z_2 &= C_2 e^{-i\omega \sin \phi t - i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \quad \left. \vphantom{z_2} \right\} z = e^{-i\omega \sin \phi t} \{ C_1 e^{i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \} \end{aligned}$$

$C_1$  und  $C_2$  werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} t &= 0 \\ z_0 &= x_0 \\ \dot{z}_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x_0 &= C_1 + C_2 \\
\dot{z} &= -i \sin \phi \omega e^{-i \sin \phi \omega t} \{C_1 e^{i \sqrt{\frac{g}{l}} t} + C_2 e^{-i \sqrt{\frac{g}{l}} t}\} \\
&\quad + e^{-i \sin \phi \omega t} \{C_1 i \sqrt{\frac{g}{l}} e^{i \sqrt{\frac{g}{l}} t} + C_2 (-i) \sqrt{\frac{g}{l}} e^{-i \sqrt{\frac{g}{l}} t}\} \\
0 &= -i \sin \phi \omega (C_1 + C_2) + i \sqrt{\frac{g}{l}} (C_1 - C_2) (\sin \phi \cdot \omega \ll \sqrt{\frac{g}{l}}) \\
\Rightarrow C_1 &= C_2 \text{ bzw. } C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2} \\
\Rightarrow z &= e^{-i \sin \phi \omega t} x_0 \cos \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \operatorname{Re}(z) = x_0 \cos(\omega \sin \phi t) \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \\
y &= \operatorname{Im}(z) = -x_0 \sin(\omega \sin \phi t) \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t
\end{aligned}$$

Das Foucault'sche Pendel beschreibt folgende Rosettenbahn ( $\varphi \neq 0$ ).

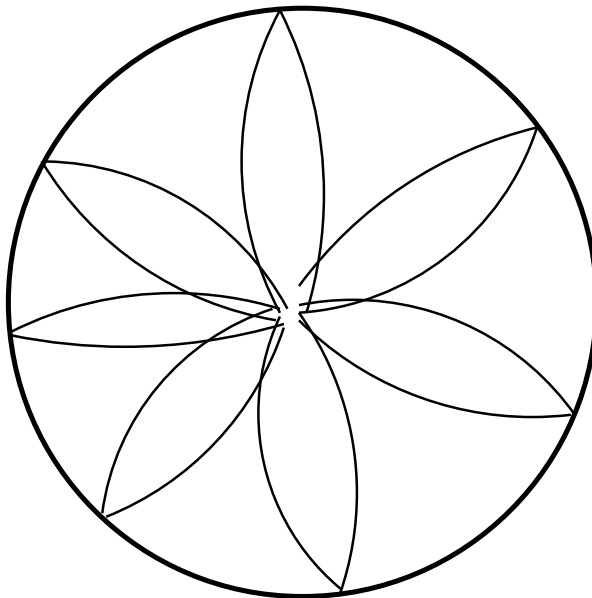


Abbildung 57: