2 Lagrange'sche Bewegungsgleichungen

Ausgearbeitet von Christine Cronjäger, Klaus Grambach und Ulrike Wacker

2.1 Zwangsbedingungen:

Zwangsbedingungen schränken die 3 Freiheitsgrade des Teilchens ein. Unterwirft man ein System mit N-Teilchen Zwangsbedingungen, so zeigt man dadurch, dass Kräfte im Problem vorhanden sind, die nicht direkt angegeben werden können, aber deren Wirkungen bekannt sind. Zwangsbedingungen, die man in Gleichungen der Form $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0$ darstellen kann, heissen holonome (= analytisch darstellbare und geschwindigkeitsunabhängige) Zwangsbedingungen. Nichtholonome Zwangsbedingungen sind Beziehungen zwischen zwischen Differentialen und Ungleichungen.

Zeitunabhängig z.B.: skleronom
Zeitabhängig z.B.: rheonom

Beispiel:
2 Teilchen in einer Dimension

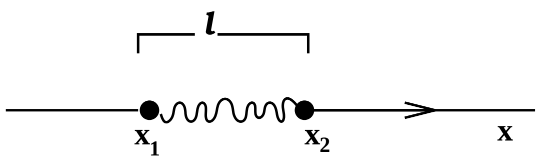

Abbildung 23: ℓ-Gleichgewichtsabstand zweier durch eine Feder verbundener Massenpunkte

Potential $U(x_1, x_2) = (1/2)a(x_1 - x_2 - \ell)^2$
$x_1 - x_2 - \ell$ Auslenkung aus Gleichgewichtslage
a = Kraftkonstante
Kraft, die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 wirkt
Kraft $F_{12} = -\frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, x_2) = -a(x_1 - x_2 - \ell) = -F_{21}$
Relativkoordinate: $x = x_1 - x_2$
Schwerpunktskoordinate: $X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$
Auf den Schwerpunkt wirkt keine Kraft, d.h. die Schwerpunktsgeschwindigkeit V = const.

Also gilt:

$$\mu\ddot{x} = F_{12}$$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ = reduzierte Masse; $F_{12} = -a(x-\ell)$
Substitution $u = x - \ell$
$\mu\ddot{u} + au = 0$ Bewegungsgleichung des harmon. Oszillators
Lösung: $x = \ell + \sqrt{2E/a}\ \sin\sqrt{a/\mu}(t-t_0)$ mit E = konst.

Mit wachsendem a wird die Feder härter und die Auslenkungen aus der Ruhelage werden kleiner $a \to \infty$: Amplitude $\to 0$, Feder geht in eine Hantel über. $x = x_1 - x_2 = \ell$ Zwangsbedingung

Ein Freiheitsgrad wurde eingefroren, die beiden Teilchen haben zusammen nur noch einen Freiheitsgrad.

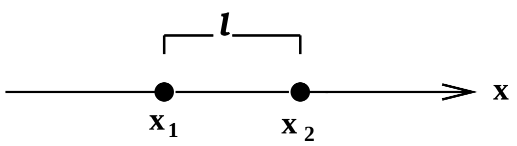

Abbildung 24: Beispiel der Hantel

Im R_3: $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \ell$
oder $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \ell^2$ Zwangsbedingung
darstellbar als: $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - \ell = 0$ oder $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \ell^2 = 0$

Allgemein: p Zwangsbedingungen

$$G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0 \quad (m = 1, \ldots, p) \tag{32}$$

holonome Zwangsbedingungen

Ohne Zwangsbedinungen hat ein System von N-Teilchen im R_3 3 N Freiheitsgrade. Durch p voneinander abhängigen Zwangsbedingungen werden p Freiheitsgrade eingefroren; das System hat noch $s = 3N - p$ Freiheitsgrade.

Auf das Teilchen i wirken folgende Kräfte:
Zwangskräfte $\vec{\vec{F}}_i$ (unbekannt, ihre Wirkungen werden durch die Zwangsbedingungen beschrieben)
andere Kräfte $\vec{F}_i$ (Wechselwirkungen und äussere Felder)

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung als

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{\vec{F}}_i \tag{33}$$

3 N Gleichungen

unbekannt sind die $\vec{r}_i$ und $\vec{\vec{F}}_i$

$\curvearrowright$ 6 N unbekannte Funktionen mit 3 N Bewegungsgleichung und p Bedingungsgleichungen. 3 N-p Unbekannte können also noch nicht bestimmt werden. Diese erhalten wir durch D'Alembertsches Prinzip.

2.2 Das D'Alembertsche Prinzip

Unter einer virtuellen Verschiebung versteht man eine gedachte sehr kleine Verschiebung $\delta\vec{r}_i$. Während die wirklichen Verschiebungen immer in einer bestimmten Zeit dt erfolgen, wird die virtuelle Verschiebung als zeitlos angesehen, $\delta t = 0$. Die virtuellen Verschiebungen müssen die Zwangsbedingungen $G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0$ erfüllen:

Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} 0 &= G_m(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N) \\ &\underbrace{= G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \delta\vec{r}_i \nabla_i G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \end{aligned}$$

Also:

$$o = \sum_{i=1}^{N} \delta\vec{r}_i \vec{\nabla}_i G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \tag{34}$$

Bedingung an virtuelle Verschiebung $\delta\vec{r}_i$

In einem mechanischen System gilt das d'Alembertsche Prinzip: Die Summe aller Zwangskräfte lei

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\vec{F}}_i \delta\vec{r}_i = 0 \tag{35}$$

mechanisches System

<u>Am Beispiel der Hantel mit masselosem Stab</u> zeigen wir die Gültigkeit des D'Alembert'schen Prinzips:

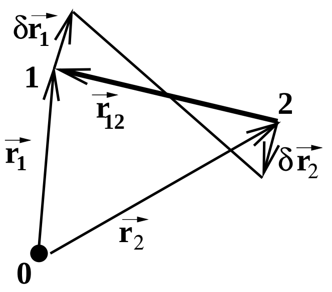

Abbildung 25:

Zwangsbedingung: $r_{12}^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \ell^2$

Betrachte die virtuelle Verrückung $\vec{r}_1 \to \vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1$

Mit (34) erhält man aus $(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \delta\vec{r}_2)^2 - \ell^2 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\vec{r}_1 \vec{\nabla}_1 \left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \ell^2\right] + \delta\vec{r}_2 \vec{\nabla}_2 \left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \ell^2\right] \\ &(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2) = 0 \curvearrowright (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \perp (\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2) \end{aligned} \tag{36}$$

Betrachte die virtuelle Arbeit der Zwangskraft:

$$\delta A = \vec{\tilde{F}}_1 \delta\vec{r}_1 + \vec{\tilde{F}}_2 \delta\vec{r}_2$$

Die Zwangskraft $\vec{\tilde{F}}_1$ wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Massen:

$$\propto (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

nach actio = reactio: $\vec{\tilde{F}}_2 = -\vec{\tilde{F}}_1 = k'(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \delta A &= -k'(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\delta\vec{r}_1 + k'(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\delta r_2 \\ &= -k'(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2) = 0 \quad \text{wegen (36)} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (34) und (35) liefern uns die fehlenden $3N - p$ Gleichungen folgendermassen:

1. Wir haben 3N Verrückungen $\delta\vec{r}_i$. Wegen der p Zwangsbedingungsgleichungen können nur $3N - p$ von den $\delta\vec{r}_i$ unabhängig sein.

2. Wir addieren die Gleichungen (34) und (35), nachdem wir (34) mit beliebigen Konstanten (Lagrange Multiplikatoren) λ_m multipliziert und über $m = 1 \ldots p$ summiert haben.

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{\tilde{F}}_i + \sum_{m=1}^{P} \lambda_m \vec{\nabla}_i G_m)\delta\vec{r}_i = 0 \tag{37}$$

3. $3N - p$ der $\delta\vec{r}_i$-Komponenten sind unabhängig voneinander und frei wählbar, die restlichen p-Komponenten sind wegen der Zwangsbedingungen dann festgelegt. Für $3N-p$ Komponenten sind die $\delta\vec{r}_i$, beliebig wählbar, so dass die Gleichung nur erfüllt wird, wenn die Summanden einzeln verschwinden:

$$\vec{\tilde{F}}_i + \sum_{m=1}^{P} \lambda_m \vec{\nabla}_i G_m) = 0 \tag{38}$$

für 3N-p Freiheitsgrade

4. Die restlichen p-Komponenten müssen nun noch bestimmt werden. Gleichung (37) kann man aufspalten in eine Summe, die alle $3N-p$ unabhängig $\delta\vec{r}_i$ Komponenten enthält und eine Summe, die die p abhängigen $\delta\vec{r}_i$-Komponenten enthält. Die $3N - p$ Summenglieder können einzeln Null gesetzt werden (vergl. 3), die restliche Summe ist ebenfalls Null, nicht aber zwangsläufig ihre einzelnen Glieder. Wir bestimmen nun die Faktoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so dass diese Summenglieder einzeln verschwinden.

$$\vec{\tilde{F}}_i + \sum_{m=1}^{P} \vec{\nabla}_i G_m \lambda_m = 0 \tag{39}$$

$3N$ Gleichungen

$$\vec{\tilde{F}}_i = -\sum_{m=1}^{P} \lambda_m \vec{\nabla}_i G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \tag{40}$$

Wir können durch diese Gleichung die 3N unbekannten Komponenten der $\vec{\tilde{F}}_i$ durch p unbekannte λ_m ausdrücken. λ heisst Lagrange-Parameter.

Unbekannte:

$$\begin{array}{cc} \vec{r}_i & 3N \\ \vec{\tilde{F}}_i & 3N \\ \lambda_m & p \end{array}$$

insgesamt $6N + p$ Unbekannte

Gleichungen:

3N Newtonsche Bewegungsgleichungen (33): $m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{\tilde{F}}_i \quad (i = 1, \ldots, N)$
3N Zwangskräftegleichungen (Gl. 40): $\vec{\tilde{F}}_i = -\sum_{m=1}^{P} \lambda_m \vec{\nabla}_i G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$
p Zwangsbedingungsgleichungen (32): $G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0 \quad (m = 1, \ldots, p)$
insgesamt: $6N + p$ Gleichungen.

Aus (32), (33), (40) erhält man die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 1. Art:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i - \sum_{m=1}^{P} \lambda_m \vec{\nabla}_i G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \qquad & (i = 1, \ldots, N) \\ G_m(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0 \qquad & (m = 1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{41}$$

Bei der Herleitung der Lagrange-Gleichungen 1. Art haben wir das d'Alembert'sche Prinzip in differentieller Darstellung benutzt.

Hamilton'sches Prinzip:
Das Hamilton'sche Prinzip ist äquivalent zu dem d'Alembertschen Prinzip und lässt sich daher aus diesem herleiten: Vor:
(2) $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{\tilde{F}}_i$ (Newtonsche Bewegungsgleichung)
(4) $\sum_i \vec{\tilde{F}}_i \delta\vec{r}_i = \delta A = 0$ (d'Alembertsches Prinzip)

Wir betrachten anstelle der jeweils 3-dimensionalen Bewegungen der N-Teilchen ihre Bewegung im 3-N-dimensionalen Raum $R_{3N}\left[x_i(t), y_i(t), z_i(t)\right]$

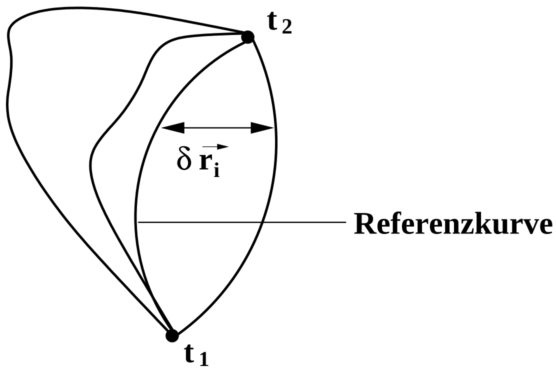

Abbildung 26:

Wir wählen die Variationen der Kurve so, dass $\delta\vec{r}_i(t_1) = \delta\vec{r}_i(t_2) = 0$. Die Zeit wird nicht mit variiert ($\delta t = 0$), das heißt jeder Zeitpunkt der Variationskurven entspricht nur einem Zeitpunkt der Referenzkurve.

$$\curvearrowright \delta\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\delta r \tag{42}$$

Aus (33) und (35) folgt

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\delta\vec{r}_i = 0 = \delta A$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta A dt = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\delta\vec{r}_i\Big\}dt = 0 \tag{43}$$

$$\text{mit } \delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_i(t)$$

Partielle Integration ergibt:

$$\text{Gl. (43)} = \sum_{i=1}^{N}(m_i\dot{\vec{r}}_i\delta r_i)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\dot{\vec{r}}_i m_i\delta\dot{\vec{r}}_i dt - \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i(t)\delta\vec{r}_i dt \tag{44}$$

Der erste Term ist Null, weil die Endpunkte nicht variiert werden. 2. Term:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\dot{\vec{r}}_i = \delta\Big(\sum_{i=1}^{N}1/2 m_i\dot{\vec{r}}_i^2(t)\Big) = \delta T$$

3. Term: Da wir nur konservative Kräfte betrachten, kann ich das Potential δU schreiben als

$$\delta U(\vec{r}_i, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)\delta\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(\vec{r}_i, \ldots \vec{r}_N)\delta\vec{r}_1$$

Dieses ist gerade der Ausdruck unter dem 2. Integral. Damit kann man Gl. (44) schreiben als:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U)dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \qquad (45)$$

Hamiltonsches Prinzip

$$L = T - U = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \qquad (46)$$

Lagrange Funktion

Das Hamiltonsche Prinzip ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Wenn die Variation einer Grösse 0 ist, ist die Grösse selbst ein Extremum

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{Extremum} \qquad (47)$$

2.3 Lagrange Gleichung (2. Art)

N Teilchen besitzen bei p Zwangsbedingungen $3N - p = s$ Freiheitsgrade. Mann kann sie durch s unabhängige Variable beschreiben.

$$q_k(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \qquad (k = 1, \ldots, s)$$

mit den Umkehrfunktionen

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_s) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

Beispiel:
Die Kugeloberfläche kann man in xyz-Koordinaten mit der Nebenbedingung $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = const.$ beschreiben oder aber durch die Polarwinkel ϕ, ϑ ohne Nebenbedingungen angeben mit:

$$\begin{aligned} x &= R \sin\vartheta \cos\phi \\ y &= R \sin\vartheta \sin\phi \\ z &= R \cos\vartheta \end{aligned}$$

Einführung neuer kartesischer Variabler:

$$\begin{array}{rcl} \text{alt} & \Longrightarrow & \text{neu} \\ x_1 & \Longrightarrow & x_1 \\ y_1 & \Longrightarrow & x_2 \\ z_1 & \Longrightarrow & x_3 \\ & \vdots \quad \vdots & \\ y_N & \Longrightarrow & x_{3N-1} \\ z_N & \Longrightarrow & x_{3N} \end{array}$$

und die alte Masse m_i (alt) ist gleich den neuen Massen $m_{3(i-1)+\nu}$ (neu) ($\nu = 1, 2, 3$). D.h. wir numerieren der Einfachheit halber Teilchen und Koordinaten durch von 1 bis $3N$. Dann können wir x_i schreiben als

$$x_j = x_j(q_1, \ldots, q_s) \quad (j = 1, \ldots, 3N) \tag{48}$$

Mit der Kettenregel erhält man

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (j = 1, \ldots, 3N) \tag{49}$$

Totale kinetische Energie:

$$T = \sum_{i=1}^{N} (1/2) m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{j=1}^{3N} (1/2) m_j \dot{x}_j^2$$

(“alte“ Koord.)

$$\underline{(49)}\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N} m_j \sum_{k,\ell=1}^{s} \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial q_\ell}\cdot\dot{q}_k\cdot\dot{q}_\ell}_{\text{Aufspaltung des quadrat. Terms}} \tag{50}$$

$$T = T(q_k,\dot{q}_k) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{s} a_{k\ell}\dot{q}_k\dot{q}_\ell$$

$$\text{mit: } a_{k\ell} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_\ell} = a_{\ell k}$$

Für die Lagrangefunktion gilt dann auch:

$$L = T(q_k,\dot{q}_k) - U(q_k) = L(q_k,\dot{q}_k) \tag{51}$$

q_k und $\dot{q}_k$ sind die generalisierten Orte und Geschwindigkeiten. Wir betrachten nun wieder das Hamilton'sche Prinzip:

$$0 = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_k,\dot{q}_k)dt = \int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\Big)dt$$

(part. Integration)

$$= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k dt = 0 \tag{52}$$

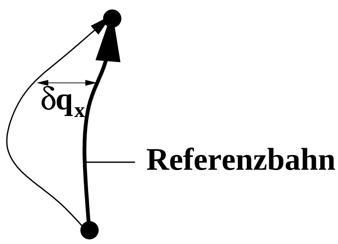

Abbildung 27:

$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$

Für die s Freiheitsgrade bestehen keine Zwangsbedingungen; die δq_k sind also beliebig wählbar.

Wähle z.B. $\delta q_k = 0$ für alle $k \neq k_0$
Wähle z.B. $\delta q_k, = \delta q_{k_0} \delta_{k,k_0}$ für alle k

Dann muss der Integrand gliedweise verschwinden, da man auch $\delta q_{k_0}(t)$ identisch Null wählen kann, abgesehen etwa von einem infinitesimalen Intervall $< t, t + \delta t >$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \ldots, s \tag{53}$$

Lagrangegleichung 2. Art (Euler-Lagrange-Gleichung)

Def. des generalisierten oder kanonischen Impulses:

$$p_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{54}$$

Aus (53) folgt:

$$\frac{d}{dt} p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{55}$$

Die alte Definition des Impulses ist in der Definition des generalisierten Impulses erhalten.

Beispiele:

1. N-Teilchen ohne Zwangsbedingungen

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 - U(x_1 \ldots, x_{3N})$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j = p_j$$

Lagrangesche Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} &= \dot{p}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} U(x_1, \ldots, x_{3N}) \\ &= m_j \ddot{x}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} U = 0 \\ \curvearrowright m_k \ddot{\vec{r}}_k &= -\vec{\nabla}_k U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \end{aligned}$$

Newtonsche Bewegungsgleichung in alten Koordinaten.

2. Ein Teilchen im zentralen, konservativen Potential $U(r)$: Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\phi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\phi \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}$$

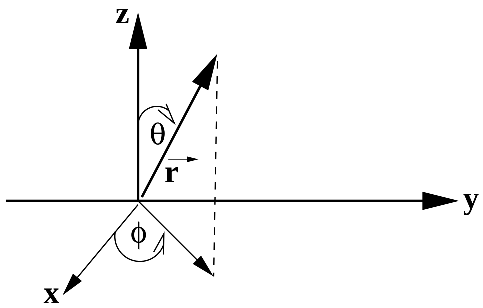

Abbildung 28: r, ϑ, ϕ entsprechen den q_k, den generalisierten Koordinaten.

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\phi}^2) - U(r) \end{aligned}$$

generalisierte Impulse:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{Radialimpuls}$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} \quad \text{Drehimpuls in } \vartheta\text{-Richtung um den Ursprung.}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2\vartheta \cdot \dot{\phi} = m(r \sin\vartheta)^2\dot{\phi}$$

Drehimpuls um z-Achse

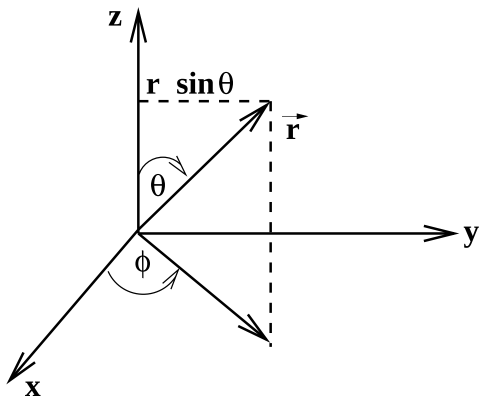

Abbildung 29:

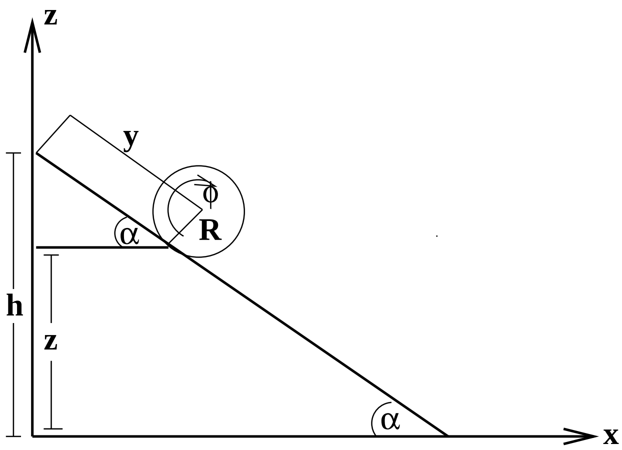

Abbildung 30:

3. Bewegung eines Zylinders auf einer schiefen Ebene

   Zylinder besitzt Masse M, Trägheitsmoment Θ und Radius R

   $y = R \cdot \phi$ Rollbedingung (A)
   $\dot{\phi} = \frac{\dot{y}}{R}$
   $\sin\alpha = \frac{h-z}{y} \qquad z = h - y\,\sin\alpha$ (B)

   Totale kinetische Energie = kinetische Energie der Translation + kinetische Energie der Rotation

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}(M + \frac{\Theta}{R^2})\dot{y}^2$$

Totale potentielle Energie: $U = M \cdot g \cdot z = M \cdot g(h - y \sin\alpha)$. Die drei Freiheitsgrade sind durch die Zwangsbedingungen (A) und (B) auf einen Freiheitsgrad, der durch y beschrieben wird, reduziert. Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(M + \frac{\Theta}{R^2})\dot{y}^2 - M \cdot g(h - y \sin\alpha)$$

Lagrangesche Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (M + \frac{\Theta}{R^2})\dot{y} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (M + \frac{\Theta}{R^2})\ddot{y} \\
\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial y} &= M \cdot g \cdot \sin\alpha \\
\curvearrowright (M + \frac{\Theta}{R^2})\ddot{y} &= M \cdot g \cdot \sin\alpha
\end{aligned}$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung für $y = y(t)$. $M + \frac{\Theta}{R^2}$ bezeichnet man als effektive oder generalisierte Masse.

Lösung: $y(t) = \frac{1}{2}\frac{Mg\sin\alpha}{M+\Theta/R^2}t^2 + c_1 t + c_2$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
y(t = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t = 0) &= 0 \\
y(t) &= 1/2\frac{g\sin\alpha}{1 + \Theta/MR^2}t^2
\end{aligned}$$

2.4 Zyklische Koordinaten

Gegeben Kugelsymmetrisches Potential $U = U(r)$. Die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten lautet:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\phi}^2) - U(r)$$

Die generalisierte Koordinate ϕ tritt nicht auf, sondern nur $\dot{\phi}$. Eine solche Variable nennt man zyklisch. ϕ entspricht q_s. Dann gilt für L:

$$L = L(q_1, \ldots, q_{s-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

Wir stellen die Lagrange-Gleichung für das s-te Glied auf:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0, \text{da L nicht von } q_s \text{ abhängt.} \tag{56}$$

Nach Gleichung (55) ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = p_s$ der generalisierte Impuls.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{d}{dt}p_s &= 0 \\ p_s &= const. \end{aligned} \tag{57}$$

Der generalisierte Impuls ist eine Erhaltungsgrösse.

Zusammenfassung:
Ist die Lagrangefunktion nicht abhängig von einer Koordinate q_s, wohl aber von ihrer zeitlichen Ableitung $\dot{q}_s$, ist diese Koordinate eine zyklische Variable und der zugehörige generalisierte Impuls p_s eine Erhaltungsgrösse.

2.5 Erhaltungssätze

Wir haben gezeigt, dass, wenn eine zyklische Koordinate auftritt, der generalisierte Impuls erhalten bleibt. Wir wollen nun das Nöthersche Theorem beweisen: Ist die Lagrangefunktion L invariant unter einer infinitisimalen Transformation $q + \delta q$, dann folgt daraus ein Erhaltungssatz.

$$L(q_K, \dot{q}_K) = L(q_K + \delta q_K, \dot{q}_K) \curvearrowright \text{Erhaltungssatz} \tag{58}$$

Beweis:
Wir entwickeln L nach Taylor:

$$L(q_K + \delta q_K, \dot{q}_K) = L(q_K, \dot{q}_K) + \sum_{K=1}^{s} \delta q_K \frac{\partial L}{\partial q_K} +$$

Glieder höherer Ordnung sind vernachlässigbar klein.

$$\Longrightarrow \sum_{K=1}^{s} \delta q_K \frac{\partial L}{\partial q_K} = 0$$

$$0 = \sum_{K=1}^{s} \delta q_K \frac{\partial L}{\partial q_K} \overset{\text{Lagr.II}}{=\!=\!=} \sum_{K=1}^{s} \delta q_K \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K}\Big)$$

$$^{*} = \frac{d}{dt}\left\{ \sum_{K=1}^{s} \Big(\delta q_K \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K}\Big) \right\} = 0$$

(Die Gl. * gilt nur, wenn δq_K zeitlich konstant ist.)

$$\sum_{k=1}^{s} \delta q_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = const \tag{59}$$

ist Erhaltungsgrösse, wenn δq_k zeitlich konstant

Beispiele:

1. Behauptung:
   Aus der Translationsinvarianz folgt die Impulserhaltung. Gegeben sind N wechselwirkende Teilchen, auf die keine äusseren Kräfte wirken. Die zwischen den Teilchen wirkenden Kräfte sind zentral und konservativ.

$$U = U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

$$L = T - U = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i<j} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$$

Verschiebung jedes Teilchens um $\vec{\varepsilon} = \vec{const}$ für alle i.

$$\frac{d(\vec{r}_i + \vec{\varepsilon})}{dt} = \dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{\varepsilon}} = \dot{\vec{r}}_i; \quad \dot{\vec{\varepsilon}} = 0$$

Die Geschwindigkeiten vor und nach der Translation sind gleich, also ist die kinetische Energie bei Translationen konstant.

$$U\Big[|(\vec{r}_i + \vec{\varepsilon}) - (\vec{r}_j + \vec{\varepsilon})|\Big] = U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

U hängt nicht von $\vec{\varepsilon}$ ab, sondern von den Relativkoordinaten.

$$L = L(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots \dot{\vec{r}}_N)$$

δq_k aus Gl. (59): $(\delta q_k, \delta q_{k+1}, \delta q_{k+2} = \vec{\varepsilon})$ für alle $k = 1, 4, 7, \ldots, s-2$. Dann wird aus Gl. (59):

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{\varepsilon} \cdot \dot{\vec{\nabla}}_k L(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N) = const \tag{60}$$

$$\text{mit } \dot{\vec{\nabla}}_k = \Big(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}_k}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}_k}\Big)$$

$$\text{Gl. (60)} = \vec{\varepsilon} \cdot \sum_{k=1}^{N} \dot{\vec{\nabla}}_k L \overset{(24)}{=\!=} \vec{\varepsilon} \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = const \tag{61}$$

$\big(\sum_{k=1}^{N} p_k\big)\vec{\varepsilon} = \text{const} = \text{Gesamtimpuls in } \vec{\varepsilon}\text{-Richtung}$

Wir benutzen hier die nicht sehr übliche Abkürzung: $\dot{\vec{\nabla}}_k = \big\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_k} \frac{\partial}{\partial \dot{z}_k}\big\}$.

Richtung und Betrag von $\vec{\varepsilon}$ sind beliebig wählbar; in jeder Richtung ist der Gesamtimpuls als eine Konstante:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = co\vec{n}st \tag{62}$$

2. Behauptung:
   Rotationsinvarianz $\curvearrowright$ Drehimpulserhaltung

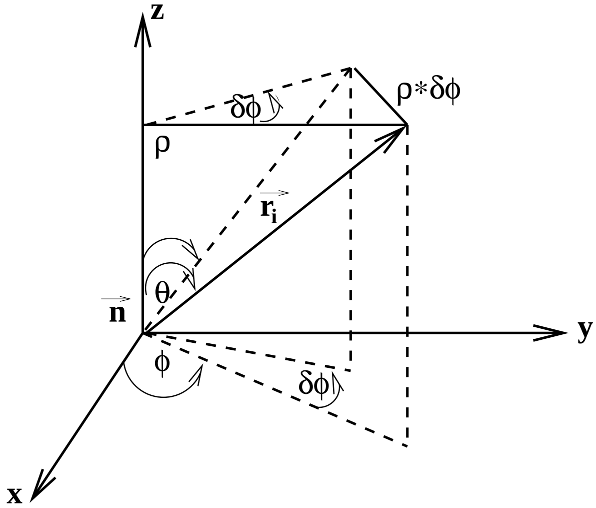

Abbildung 31:

Rotation von $\vec{r}_i$ um die z-Achse.

$$\delta\vec{\phi}||\vec{z}$$

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + (\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i) = \vec{r}_i + \delta\phi(\vec{n} \times \vec{r}_i) = \vec{r}_i + \delta\vec{q}_i$$

Gl. (59) wird zu:

$$\frac{d}{dt}\Big\{ \sum_{i=1}^{N} \delta\phi\big[(\vec{n} \times \vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{\nabla}}_i L\big] = 0 \tag{63}$$

$$\delta\phi\big[(\vec{n}\times\vec{r}_i)\cdot\dot{\vec{\nabla}}_i L\big] \quad \text{ist das Spatprodukt.}$$

$$\begin{aligned}
\text{Gl. (63)} &= \delta\phi\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{n}(\vec{r}_i\times\dot{\vec{\nabla}}_i L)\\
&= \delta\phi\vec{n}\cdot\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)=0\\
&\curvearrowright \Big[\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{p}_i\Big]_z = const.
\end{aligned}\tag{64}$$

Dies ist der Gesamtdrehimpuls längs der Rotations- (z-)Achse. Ist die Lagrangefunktion invariant gegenüber der Rotation um eine Achse, dann ist der Gesamtdrehimpuls längs dieser Achse eine Konstante.

3. Behauptung:
   Zeitliche Invarianz der Lagrangefunktion $\curvearrowright$ Energieerhaltung:

   Voraussetzung: $L(t) = L(t+\delta t)$
   Taylorentwicklung: $L(t+\delta t) = L(t) + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$
   Glieder höherer Ordnung sind vernachlässigbar klein.

$$\frac{\partial L}{\partial t}\delta t = 0$$

$$\text{da} \quad \delta t \neq 0: \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

also hängt L nicht von der Zeit ab. Die totale zeitliche Ableitung der Lagrangefunktion lautet:

$$\frac{dL(q_k,\dot{q}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^{s}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\Big)$$

$$\underline{\text{Lagr.II}} \quad \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big)\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}\dot{q}_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\Big) \tag{65}$$

$$0 = \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(T - U - \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\Big) = 0 \tag{66}$$

Wir nehmen an, dass U keine Funktion von $\dot{q}_k$ ist und T eine homogene Funktion 2. Grades von $\dot{q}_k$ ist. Für L gilt dann:

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T \quad \text{(nach Eulerschem Satz)}$$

Damit wird aus Gleichung (66):

$$\frac{d}{dt}(T - U - 2T) = -\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

$$\text{oder} \quad \frac{d}{dt}(T + U)) = \frac{d}{dt}E = 0$$