

# Theoretische Mechanik

Amand Faessler

6. April 2005

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Newton'sche Mechanik</b>	<b>3</b>
1.1	Newton'sche Gesetze . . . . .	3
1.2	Zentrales Kraftfeld . . . . .	10
1.3	n wechselwirkende Teilchen . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Lagrange'sche Bewegungsgleichungen</b>	<b>35</b>
2.1	Zwangsbedingungen: . . . . .	35
2.2	Das D'Alembertsche Prinzip . . . . .	37
2.3	Lagrange Gleichung (2. Art) . . . . .	42
2.4	Zyklische Koordinaten . . . . .	48
2.5	Erhaltungssätze . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Kleine Schwingungen</b>	<b>55</b>
3.1	Theorie der kleinen Schwingungen . . . . .	55
3.2	Das Doppelpendel . . . . .	74
3.3	Der lineare Schwinger . . . . .	78
3.4	Modell des Festkörpers: Die lineare Kette . . . . .	85
3.5	Lineare Kette mit verschiedenen Massen . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Starrer Körper</b>	<b>96</b>
4.1	Translation und Rotation des starren Körpers - die Euler-Winkel	96
4.2	Die Euler'schen Gleichungen . . . . .	106
4.3	Der Schwere symmetrische Kreisel . . . . .	110
4.4	Rotierendes Koordinatensystem . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Gravitationstheorie</b>	<b>120</b>
5.1	Gravitationskraft - Gravitationsfeld . . . . .	120
5.2	Gravitationspotential . . . . .	122

5.3	Feldgleichungen . . . . .	122
5.4	Beispiele . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Die kanonischen Bewegungsgleichungen</b>	<b>134</b>
6.1	Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen . . . . .	134
6.2	Kanonische Transformationen . . . . .	139
6.3	Verschiedene Variationsprinzipien . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Die Hamilton-Jacobi-Theorie</b>	<b>165</b>
7.1	Einleitung . . . . .	165
7.2	Die Hamilton-Jacobi-Theorie für nicht explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion . . . . .	165
7.3	Die Hamilton-Jacobi-Theorie für explizit zeitabhängige Hamil- tonfunktion . . . . .	167
7.4	Die Hamilton-Jacobi-Gleichung als Grenzfall der Schrödinger- gleichung in der Quantenmechanik . . . . .	169
7.5	Beispiele zur Hamilton-Jacobi-Theorie (zeitunabhängig) . . . .	170
<b>8</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>181</b>
8.1	Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum . . . . .	181
8.2	Lichtkegel und Eigenzeit . . . . .	187
8.3	Die Lorentz-Transformation . . . . .	195
8.4	Vierervektoren . . . . .	202
8.5	Die Vierergeschwindigkeit . . . . .	203
8.6	Der 4-dimensionale Gradient . . . . .	204
8.7	Relativistische Newton'sche Bewegungsgleichung . . . . .	206
8.8	Lagrange- und Hamilton-Funktion in der relativistischen Me- chanik . . . . .	209

# 1 Newton'sche Mechanik

Ausgearbeitet von B. Hügler und J. Spilgies

## 1.1 Newton'sche Gesetze

Die klassische Mechanik wurde begründet mit den Newton'schen Gesetzen = 1687.

### Lex prima:

Ein Teilchen bewegt sich ohne äußere Kraft mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Linie

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{const}$$

### Lex secunda:

Die Impulsänderung ist gleich der Kraft, die auf das Teilchen wirkt.

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F}$$

Der Impuls  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, wobei träge Masse = schwere Masse.

### Lex tertia:

Actio est Reactio  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

( $\vec{F}_{12}$  = Kraft, die auf Teilchen 1 wirkt aufgrund der Wechselwirkung mit Teilchen 2.)

Diese Gesetze sind nicht in allen Systemen erfüllt (z.B. nicht auf der Erde). Die Systeme, in denen sie erfüllt sind, nennt man Inertialsysteme. Wir werden vorerst nur solche behandeln. Wir wollen nun ein Teilchen definieren: Ein Teilchen ist definiert als Punktteilchen, das durch

1. die Masse  $m$
2. den Ort  $\vec{r}$
3. die Geschwindigkeit  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  festgelegt ist.

Oft ist die Masse konstant, dann kann man die Lex secunda schreiben:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \frac{d}{dt}\vec{v} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Dies ist nicht der Fall bei einer Rakete oder bei relativistischer Betrachtung von Teilchen mit sehr großen Geschwindigkeiten. Dann gilt für m:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ mit } c = 3 \cdot 10^{10} [\text{cm/sec}].$$

Für  $v \rightarrow c \Rightarrow m \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = 0$

Die Lex prima ist ein Spezialfall der Lex secunda:

aus  $\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F}, \vec{F} = 0, m = \text{const} \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$

Impulserhaltung:

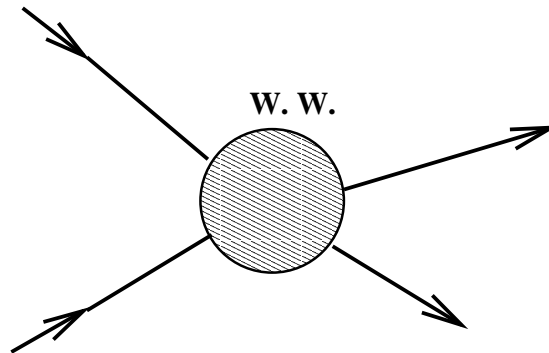


Abbildung 1:  $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \text{W.W.} = \vec{p}''_1 + \vec{p}''_2$

Ausserhalb des WW-Gebietes wirken keine Kräfte.

Innerhalb des WW-Gebietes wirken die Teilchen aufeinander.

nach Lex tertia gilt:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \Rightarrow \int_{t'}^{t''} (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) dt = 0 \quad (1)$$

nach Lex secunda gilt:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_1 = \vec{F}_{12}; \quad \frac{d}{dt}\vec{p}_2 = \vec{F}_{21} \quad (2)$$

einsetzen in (1) ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) dt &= 0 \\ \Rightarrow [\vec{p}_1 + \vec{p}_2]_{t'}^{t''} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' &= \vec{p}_1'' + \vec{p}_2'' \end{aligned} \quad (3)$$

mit Worten: Gesamtimpuls ist stets unverändert.

Energieerhaltung:

Wir betrachten ein Teilchen in einem äußeren Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$ : Arbeit ist die Energie, die auf ein Teilchen übertragen wird:

$$\begin{aligned} A = \Delta E \quad (\underline{\text{def}}) &= \int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad \underline{\text{Lex sec}} \quad \int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} m\ddot{\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{(dt)}(dt) \\ &= \int_{t'}^{t''} m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt = \left[ \frac{1}{m} m\dot{\vec{r}}^2 \right]_{t'}^{t''} = (\underline{\text{def}}) = T(\vec{r}'') - T(\vec{r}') \end{aligned} \quad (4)$$

Die kinetische Energie ist definiert:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (5)$$

Wir wollen beweisen:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \Leftrightarrow \text{Energieerhaltung} \\ \text{Aus (1)} \Rightarrow \Delta E &= A = \int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} d\vec{r} \vec{F}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} \vec{\nabla}U(\vec{r}) d\vec{r} = \\ &= U(\vec{r}') - U(\vec{r}'') \\ &= T(\vec{r}'') - T(\vec{r}') \quad (\text{nach Gl. (4)}) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$T(\vec{r}') + U(\vec{r}') = T(\vec{r}'') + U(\vec{r}'') \quad (6)$$

in Worten:

unter Voraussetzung, dass sich  $\vec{F}(\vec{r})$  schreiben lässt als  $-\vec{\nabla}U(\vec{r})$ , gilt: Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist stets unverändert.

$$(2) \Leftarrow E = \text{const} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

Es ist zu zeigen, dass  $U(\vec{r})$  eine eindeutig bestimmte Funktion ist. Zwischen den Zeiten  $t'$  und  $t''$  erfährt das Teilchen eine Energieänderung

$$\Delta E = A = \int_{\vec{r}(t')}^{\vec{r}(t'')} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = T(\vec{r}'') - T(\vec{r}') = U(\vec{r}') - U(\vec{r}'')$$

Als nächstes wird gezeigt, dass die geleistete Arbeit vom Weg unabhängig ist.

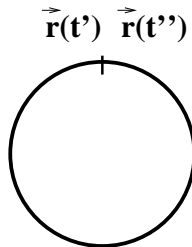


Abbildung 2:  $\vec{r}(t') = \vec{r}(t'')$

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(t'') \Rightarrow \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

Kraftfeld ist wirbelfrei, keine geschlossenen Feldlinien (Energieerhaltung).

$$\begin{aligned} \text{Wir wählen } U(2) &= 0 \Rightarrow \int_{2C_1}^1 \dots + \int_{1C_2}^2 \dots = 0 \\ \Rightarrow \int_{2C_1}^1 \dots - \int_{2C_2}^1 \dots &= 0 \Rightarrow \int_{2C_1}^1 \dots = \int_{2C_2}^1 \dots \end{aligned}$$

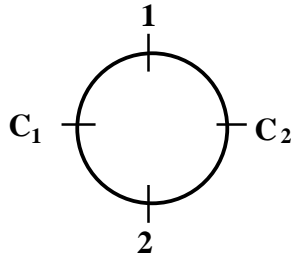


Abbildung 3:

Benutzen wir 2 als Referenzpunkt, so folgt daraus, dass das Integral  $\int_{r_2}^{r_1} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$  eine eindeutige Funktion des Ortes ist.

$$\int_{r_2}^{r_1} \vec{F}(\vec{r}) dr = -U(\vec{r}_1) \Rightarrow$$

$$\vec{F}(\vec{r}_1) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}_1) \quad (7)$$

Für gewöhnlich nimmt man als Referenzpunkt  $\infty$ , dann ist  $U(\infty) = 0$ , oder man wählt den Nullpunkt, dann ist  $U(0) = 0$ .  $U(\vec{r})$  ist das Potential des Kraftfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$ . Existiert ein Potential, so nennt man das Kraftfeld konservativ

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \Leftrightarrow \vec{F}(r) \quad \text{ist konservativ}$$

Eindimensionales konservatives System:

Aus dem Energiehaltungssatz folgt

$$E = const = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

Auflösen nach  $\dot{x}$  ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \dot{x} &= \left[ \frac{2}{m}(E - U(x)) \right]^{1/2} \\ \Leftrightarrow dt &= \frac{dx}{\left[ \frac{2}{m}(E - U(x)) \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

Integration ergibt:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \left[ \frac{2}{m} (E - U(x)) \right]^{-1/2} \cdot dx \quad (8)$$

Aus  $t = f(x)$  folgt  $x = f^{-1}(t)$ , die gesuchte Bahngleichung des Teilchens im Kraftfeld mit dem Potential  $U(x)$ .

Beispiel: Harmonischer Oszillator

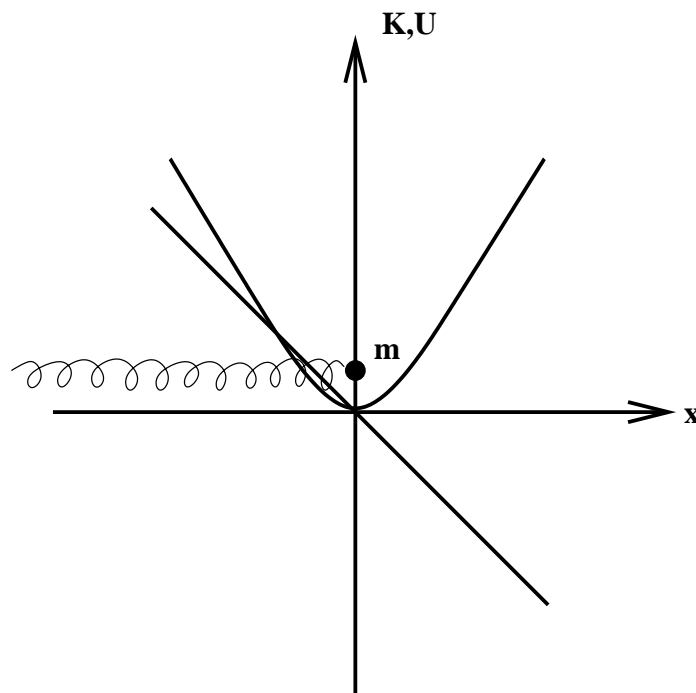


Abbildung 4:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2}ax^2 \\ F &= -ax \\ F &= -\frac{\partial}{\partial x}U(x) \\ \Rightarrow U(x) &= \frac{1}{2}ax^2 \\ F(x) &= -a \cdot x \quad \text{Hooke'sches Gesetz} \end{aligned}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}ax^2)}} \quad (9)$$

Da  $\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}ax^2) > 0$  sein muss  $\Rightarrow -\sqrt{2E/a} < x < \sqrt{2E/a}$ . Dies nennt man die klassischen Umkehrpunkte. In diesen Umkehrpunkten ist die Gesamtenergie potentiell  $U(+\sqrt{2E/a}) = (1/2)a(\sqrt{2E/a})^2 = E$ .

Sei zurzeit  $t = t_0$ ,  $x = 0$ , so ergibt sich für (9):

$$t - t_0 = \sqrt{m/2} \frac{1}{\sqrt{(1/2)a}} \arcsin \frac{ax}{2\sqrt{1/2aE}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2E/a} \sin \sqrt{a/m}(t - t_0) \quad (10)$$

Kreisfrequenz  $\omega$  (def) =  $\sqrt{a/m} = 2\pi\nu$

Über die Bewegungsgleichung erhält man dasselbe Ergebnis:

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = -ax \quad (\text{Lex secunda})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{a}{m}x = 0$$

Dies ist eine Diffgleichung 2. Ordnung.

Ansatz:  $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

Mit den Anfangsbedingungen  $t = t_0 \Rightarrow x_0 = 0$  ergibt sich

$$x = 0 = A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t)$$

$$= C(-\sin \omega t_0 \cos \omega t - \cos \omega t_0 \sin \omega t)$$

$$= C \sin(\omega(t - t_0))$$

Damit ergibt sich für die Diffgleichung:

$$-\omega^2 C \sin \omega(t - t_0) + \frac{a}{m} C \sin \omega(t - t_0) = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^2 + \frac{a}{m} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{a/m}$$

Wir erhalten damit:

$$x = C \cdot \sin \left[ \sqrt{a/m}(t - t_0) \right]$$

$C$  lässt sich durch Angabe der Energie berechnen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ax^2 \\ &= \frac{C^2}{2} \left[ m\sqrt{a/m}^2 \cos^2 \omega(t - t_0) + a \sin^2 \omega(t - t_0) \right] \\ &= \frac{a}{2}C^2 \Rightarrow C = \sqrt{2E/a} \end{aligned}$$

Die Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude  $C$ .

## 1.2 Zentrales Kraftfeld

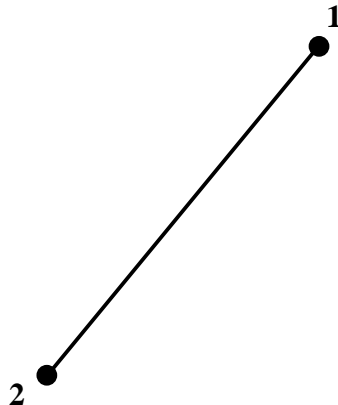


Abbildung 5: Definition der zentralen Wechselwirkung

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{F}_{21} &= f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{aligned}$$

Die Zentralkraft ist die Kraft, die stets in Richtung der Verbindung zweier wechselwirkender Teilchen wirkt. In einem zentralen Kraftfeld ist die auf ein Teilchen wirkende Kraft immer auf den gleichen Punkt gerichtet.

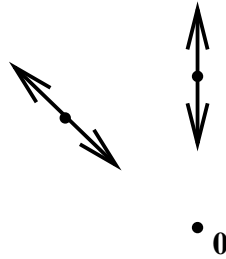


Abbildung 6:  $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \cdot \vec{r}$  Definition der Zentralkraft

Theorem:

Ein zentrales, konservatives Kraftfeld hängt in folgender Weise vom Abstand zum Ursprung ab.

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\vec{r} \quad (11)$$

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \underbrace{-\vec{\nabla}U(\vec{r})}_{\text{konservativ}} = \underbrace{f(\vec{r})\vec{r}}_{\text{zentral}}$$

Zerlegung der Kraft und Umrechnung in Polarkoordinaten ergibt:

$$\begin{aligned} F_x(\vec{r}) &= -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} = f(\vec{r})x = f(\vec{r})r \sin \theta \cos \phi \\ F_y(\vec{r}) &= -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} = f(\vec{r})y = f(\vec{r})r \sin \theta \cos \phi \\ F_z(\vec{r}) &= -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} = f(\vec{r})z = f(\vec{r})r \cos \theta \end{aligned}$$

Zu zeigen ist  $U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|)$ , das heißt:

$$\frac{\partial U(r)}{\partial r} \neq 0; \quad \frac{\partial U(r)}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial U(r)}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} &= \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} &= \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \sin \theta \cos \phi + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \sin \theta \sin \phi + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \cos \theta \\
\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} &= -f(\vec{r})r [\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta] \\
&= -f(\vec{r})\vec{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \theta} &= \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \theta} &= (-)f(\vec{r})r^2 [\cos \theta \cos^2 \phi \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - \sin \theta \cos \theta] \\
&= (-)f(\vec{r})r^2 [\cos \theta \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \cos \theta \sin \theta] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \phi} &= \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \phi} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \phi} &= (-)f(\vec{r})r^2 [-\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi] = 0
\end{aligned}$$

$U(\vec{r})$  hängt also nur von  $|\vec{r}|$  ab, das heißt  $U(\vec{r}) \equiv U(r)$ . Wählen wir den Referenzpunkt im Unendlichen, das heißt  $U(\infty) = 0$ , so ergibt sich:

$$U(r) = - \int_{\infty}^r f(r) r dr \quad \text{q.e.d.} \quad (12)$$

Beispiel: Der harmonische isotrope Oszillator  
Proton-Elektron-Wechselwirkung:

$$U(r)_{Coulomb} = -\frac{e^2}{r}$$

Neutron-Neutron-Wechselwirkung (Yukawa Potential):

$$U(r)_{n,n} = \frac{-V e^{-r/\mu}}{r/\mu} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{\hbar}{m_{\pi} c} = 1,4 fm$$

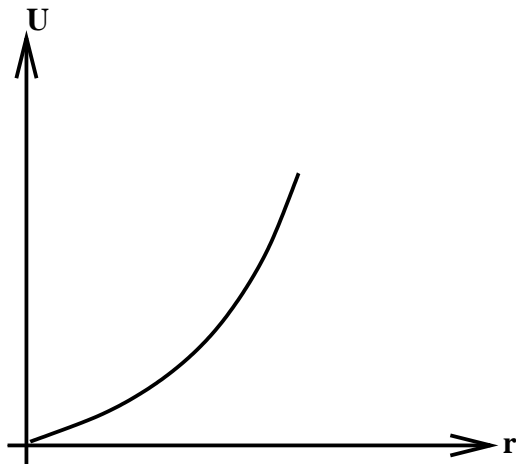


Abbildung 7:  $U(r) = 1/2ar^2$

Gravitationspotential:

$$U(r)_{\text{Sonne-Erde}} = -G \frac{m_E \cdot m_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|}$$

Theorem:

Die Bewegung eines Teilchens im zentralen Kraftfeld ist eben.

Beweis: qualitativ

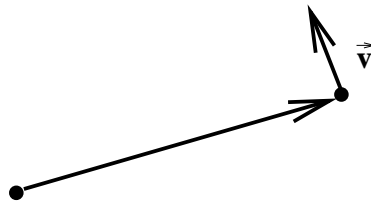


Abbildung 8:  $\vec{F} \propto \vec{r}$ , da  $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}$

da  $m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}$ , existiert keine senkrechte Beschleunigung zur Ebene  $(\vec{r}, \vec{v})$ .

Beweis: exakt

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = (yp_z - zp_y, zp_y - xp_z, xp_y - yp_x) \\ \Rightarrow \dot{\vec{J}}(\vec{r}) &= \underbrace{\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}}}_0 + \underbrace{\vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}}_0 = 0 \end{aligned}$$

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße. Da  $\vec{J} \perp$  zu  $\vec{r}$  und  $\vec{J} = \text{const}$ , ist  $\vec{r}$  stets in der gleichen Ebene.

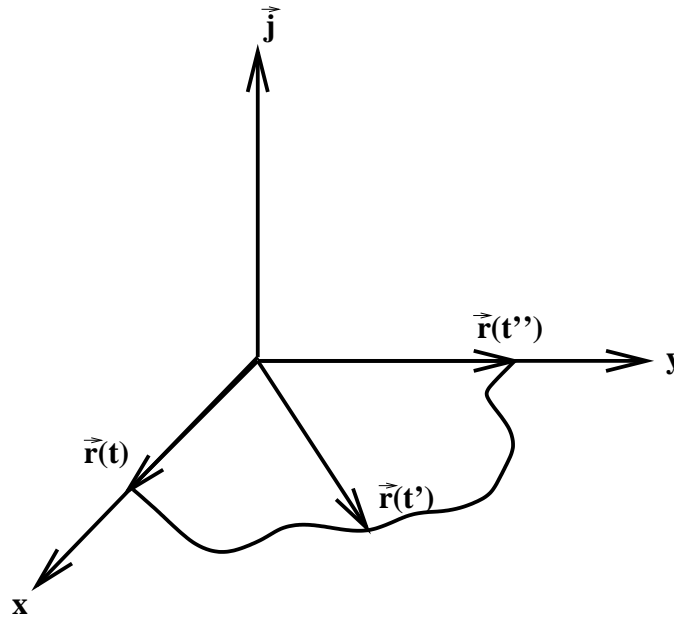


Abbildung 9: Ebene Bewegung

Teilchen in einem dreidimensionalen, konservativen und zentralen Kraftfeld: Nach der Lex secunda existieren drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Lösung hat demnach sechs Integrationskonstanten, d.h.: folgende sechs Funktionen sind zu bestimmen:

$$x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t)$$

Da das Kraftfeld konservativ und zentral ist, gilt

- a) Drehimpulserhaltung (zentrales Feld, drei Erhaltungsgrößen), d.h., die Bewegung ist eben. Dadurch reduzieren sich die unbekannt Funktionen auf 3.
- b) Energieerhaltung (konservatives Feld), dadurch reduziert sich das Problem auf die Lösung von zwei Differentialgleichungen, die aus den Bewegungsgleichungen gefunden werden müssen.

Da die Bewegung eben ist, kann man die x,y-Ebene in die Bewegungsebene legen

$$\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}} &= -\vec{\nabla}U(r) \\
\Rightarrow m\ddot{x} &= -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \\
m\ddot{y} &= -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}
\end{aligned}$$

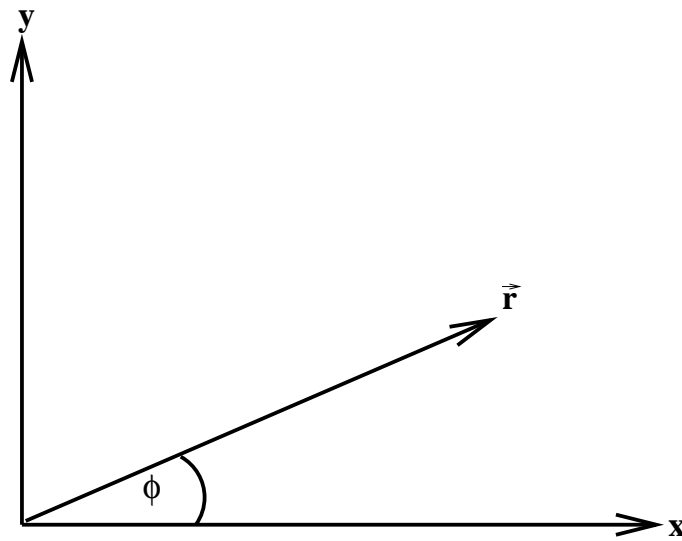


Abbildung 10:  $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \phi$ ;  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \phi$

Damit ergibt sich für die beiden obigen Differentialgleichungen:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \cos \phi; \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \sin \phi$$

Wir wollen jedoch nicht die Bewegungsgleichungen, sondern die Erhaltungssätze benutzen:

Da die Bewegungsebene (x,y-Ebene) durch  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  aufgespannt wird, hat  $\vec{J}$  nur eine z-Komponente ( $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ ).

Wir können aufgrund der Erhaltungssätze schreiben:

a)

$$J = J_z = xmy\dot{} - ym\dot{x}$$

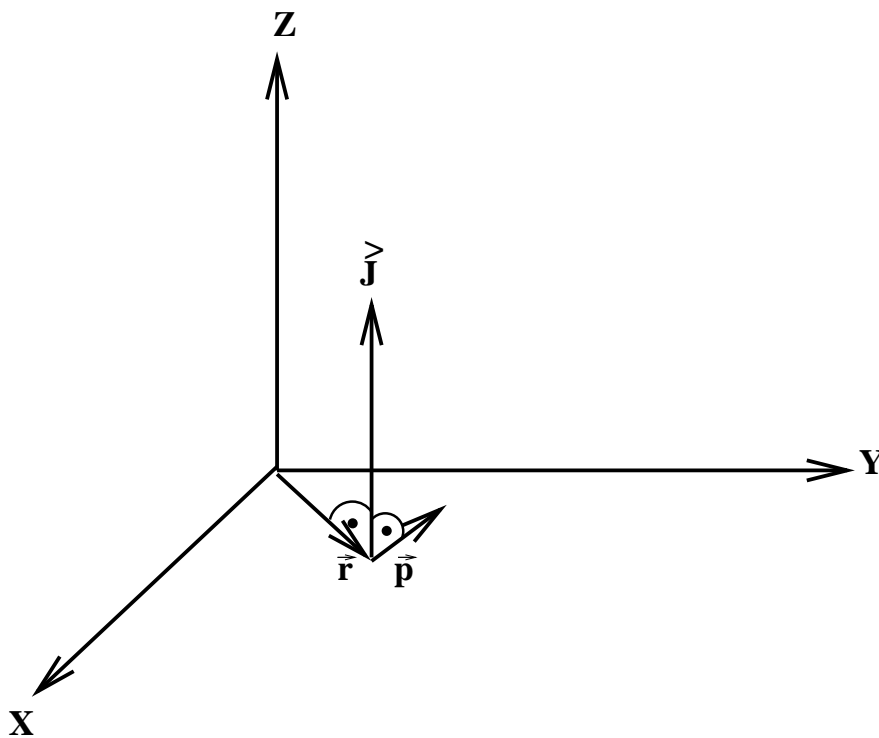


Abbildung 11:

b)

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(r)$$

Umrechnung in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \phi & \dot{x} &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ y &= r \cdot \sin \phi & \dot{y} &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \end{aligned}$$

ergibt:

a)

$$\begin{aligned} J_z &= m(r\dot{r} \cos \phi \sin \phi + r^2\dot{\phi} \cos^2 \phi - r\dot{r} \cos \phi \sin \phi + r^2\dot{\phi} \sin^2 \phi) \\ J_z &= mr^2\dot{\phi} \end{aligned} \quad (13)$$

b)

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \cos^2 \phi - 2r\dot{r}\dot{\phi} \cos \phi \sin \phi + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + \\
 &\quad + \dot{r}^2 \sin^2 \phi + 2r\dot{r}\dot{\phi} \cos \phi \sin \phi + r^2\dot{\phi}^2 \cos^2 \phi) + U(r) \\
 E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Die Drehimpulserhaltung wird auch als Flächensatz bezeichnet.

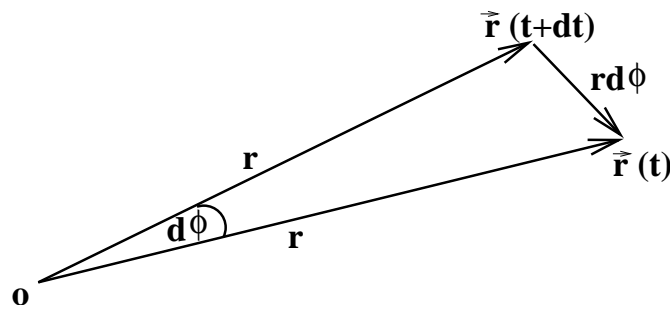


Abbildung 12:  $dF = \frac{1}{2}r^2 d\phi$ ;  $\frac{dF}{dt} = \dot{F} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$

$\dot{F} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}$  wird als Flächengeschwindigkeit definiert.

Damit kann man Gl. (13) schreiben als  $J = J_z = 2m\dot{F}$ .

Aus der Drehimpulserhaltung folgt damit, dass die Flächengeschwindigkeit const. ist.

Aus Gl. (13) und (14) eliminieren wir jetzt  $\dot{\phi}$ :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + U(r) = \tag{**}(15) \\
 &\quad T_{rad} + T_{rot} + \text{Pot. Energie}
 \end{aligned}$$

Die Zentrifugalkraft berechnet sich als

$$F_{Zen} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{J^2}{2mr^2} = \frac{J^2}{mr^3} = \frac{(mr^2\dot{\phi})^2}{mr^3}$$

Mit  $V_{\perp} = r \cdot \dot{\phi}$  ergibt sich:

$$F_{Zen} = \frac{mV_{\perp}^2}{r} = mr\dot{\phi}^2 = mr\omega^2 \tag{16}$$

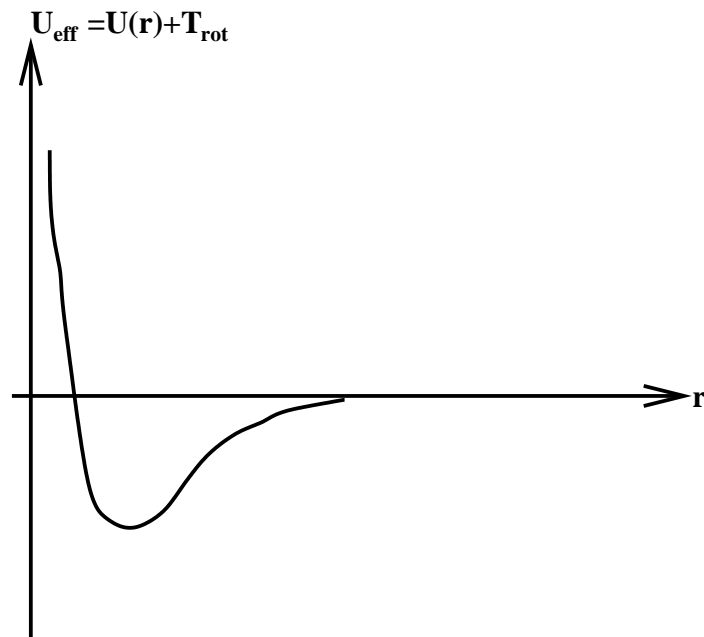


Abbildung 13:  $T_{rot}$  wird oft als zentrifugales Potential bezeichnet und der potentiellen Energie zugeschlagen.  $U_{eff} = U(r) + T_{rot}$  wird als effektives Potential bezeichnet. Das Minimum von  $U_{eff}$  führt zu stabilen Bahnen.

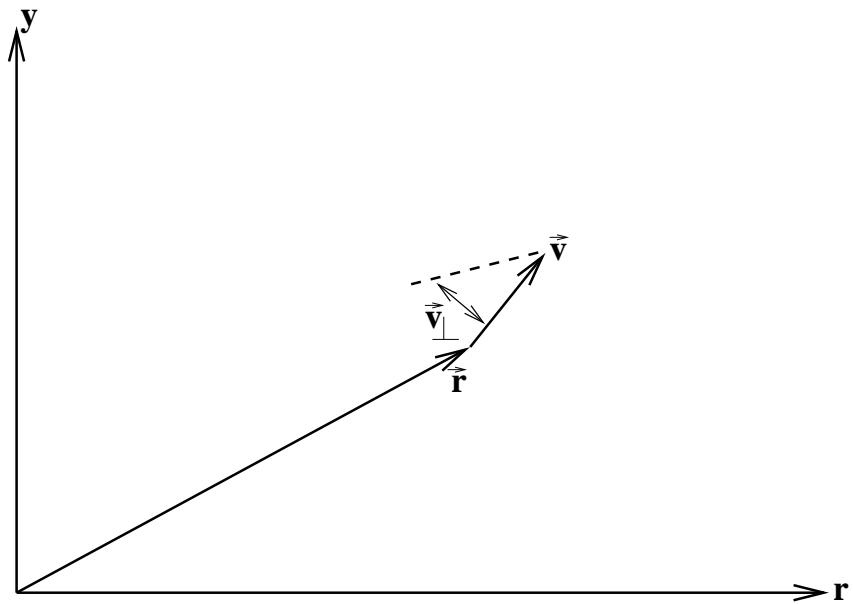


Abbildung 14:

Formal ist (15) ein eindimensionales Problem, das sich wie die Gleichung (8) lösen lässt:

$$\Rightarrow t - t_0 = \int_{r_0}^r \left[ \frac{2}{m} \left( E - \frac{J^2}{2mr^2} - U(r) \right) \right]^{-1/2} dr = \int_{r_0}^r G(r) dr \quad (17)$$

Über den Drehimpulssatz wird t eliminiert:

$$\begin{aligned} J &= mr^2 \dot{\phi} = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \\ \Rightarrow d\phi &= \frac{J}{mr^2} dt \end{aligned} \quad (18)$$

Wir setzen Gleichung (17) in der Differentialform in Gleichung (18) ein und erhalten  $\phi(r)$ .

$$\begin{aligned} \text{Gl. (17)} \Rightarrow dt &= G(r) dr \\ \Rightarrow d\phi &= \frac{J}{mr^2} G(r) dr \\ \Rightarrow \phi - \phi_0 &= \int_{r_0}^r \frac{J}{r^2} \left[ 2m \left( E - \frac{J^2}{2mr^2} - U(r) \right) \right]^{-1/2} dr \end{aligned}$$

Anwendung auf das Zweikörperproblem:

1. Sonne - Erde

$$U(r) = -G \frac{m_E m_s}{r} = -\frac{\gamma}{r} \quad (G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2})$$

2. Elektron (Positron)-Proton (Coulomb Pot. im H-Atom)

$$U(r) = (\pm) \frac{e^2}{r}$$

3. Neutron-Neutron (Yukawa-Potential)

$$U(r) = -c \frac{e^{-r/\nu}}{r/\nu}$$

(Austausch von  $\pi$ -Mesonen)

$$\mu = \frac{\hbar}{m_\pi c} = 1,4 fm = 1,410^{-13} cm$$

Bis jetzt können wir nur Einkörperprobleme lösen:

Zur Lösung von Zweikörperproblemen führen wir die Schwerpunkt- und Relativkoordinaten, sowie die reduzierte Masse ein:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \underline{\text{def.}} \quad \frac{m_E \vec{r}_E + m_s \vec{r}_s}{m_E + m_s} \\ &(\text{Schwerpunktcoordinate}) \end{aligned} \quad (19)$$

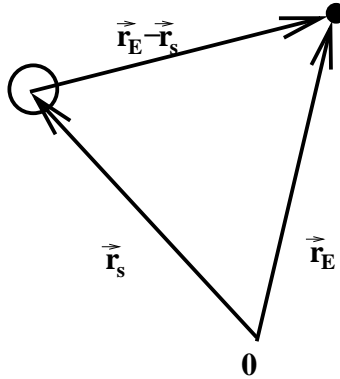


Abbildung 15:  $m_s \ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}_{SE}$ ;  $m_E \ddot{\vec{r}}_E = \vec{F}_{ES}$

$$\vec{r} = \text{def. } \vec{r}_E - \vec{r}_s \quad (20)$$

(Relativkoordinate)

$$\mu = \frac{m_E \cdot m_s}{m_E + m_s} \approx m_E \quad (21)$$

(reduzierte Masse)

$\vec{F}_{ES}$  errechnet sich dann aus::

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_E - \ddot{\vec{r}}_S &= \frac{1}{m_E} \vec{F}_{ES} - \frac{1}{m_S} \vec{F}_{SE} = \left( \frac{1}{m_E} + \frac{1}{m_S} \right) \vec{F}_{ES} \\ \frac{m_E + m_S}{m_E \cdot m_S} \cdot \vec{F}_{ES} &= \ddot{\vec{r}} \Rightarrow \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{ES} \end{aligned}$$

Mit  $m_E + m_S = M$  erhält man die Beschleunigung des Schwerpunktes:

$$M \ddot{\vec{R}} = M \frac{m_E \ddot{\vec{r}}_E + m_S \ddot{\vec{r}}_S}{m_E + m_S} = \vec{F}_{ES} + \vec{F}_{SE} = 0$$

Das bedeutet:

Der Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Linie. Damit haben wir das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem zurückgeführt.

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (22)$$

Dies wenden wir nun auf das Kepler Problem an:  
Das Potential zwischen Erde und Sonne beträgt:

$$U(r) = -\frac{\gamma}{r} \quad \text{mit} \quad \gamma = Gm_E m_S \quad \text{und} \quad \vec{r} = \vec{r}_E - \vec{r}_S$$

Für die Kraft  $\vec{F}(r)$  gilt:

$$\vec{F}(r) = +\vec{\nabla} \frac{\gamma}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\gamma}{r} \left( \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right)$$

hierbei ist  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  und damit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Damit ergibt sich für

$$\vec{F}(r) = -\frac{\gamma}{r^2} \left( \frac{x}{r}; \frac{y}{r}; \frac{z}{r} \right) = -\frac{\gamma}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Setzen wir nun  $U(r) = -\gamma/r$  in die Gleichung ein:

$$\phi - \phi_0 = \int_{r_0}^r \frac{J}{r^2} \left[ 2\mu \left( E - \frac{J^2}{2\mu r^2} + \frac{\gamma}{r} \right) \right]^{-1/2} dr$$

Substituieren wir  $z = \frac{1}{r} \Rightarrow dz = -\frac{1}{r^2} dr$  so folgt:

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= -J \int_{1/2r_0}^{1/r} \left[ 2\mu \left( E - \frac{J^2}{2\mu} z^2 + \gamma \cdot z \right) \right]^{-1/2} dz \\ \phi - \phi_0 &= - \int_{1/r_0}^{1/r} \frac{dz}{\sqrt{\frac{2\mu E}{J^2} + \frac{2\mu\gamma}{J^2} z - z^2}} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C + 2bx + ax^2}} = \frac{+1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}} + c \quad \text{für} \quad a < 0$$

$$C = \frac{2\mu E}{J^2}; \quad b = \frac{\mu\gamma}{J^2}; \quad a = -1$$

Daraus erhält man:

$$\phi - \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{1}} \operatorname{arc} \sin \frac{-z + \frac{\mu\gamma}{J^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2\gamma^2}{J^4} + \frac{2\mu E}{J^2}}} + C$$

$C$  ziehen wir mit in die Anfangsbedingung hinein und erhalten

$$\phi - \tilde{\phi}_0 = \operatorname{arc} \sin \frac{\frac{\mu\gamma}{J^2} - z}{\sqrt{\frac{\mu^2\gamma^2}{J^4} + \frac{2\mu E}{J^2}}}$$

Damit erhalten wir für  $z(\phi)$ :

$$z(\phi) = -\sqrt{\frac{\mu^2\gamma^2}{J^4} + \frac{2\mu E}{J^2}} \sin(\phi - \tilde{\phi}_0) + \frac{\mu\gamma}{J^2}$$

Für  $\tilde{\phi}_0$  schreiben wir:  $\phi_0 + \frac{\pi}{2}$

Hiermit erhalten wir später für den Kegelschnitt die Normalform.

$$\Rightarrow \sin(\phi - \tilde{\phi}_0) = \sin\left(\phi - \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\phi - \phi_0)$$

Weiterhin machen wir die Substitution  $z = \frac{1}{r}$  rückgängig und erhalten:

$$\begin{aligned} r(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2\gamma^2}{J^4} + \frac{2\mu E}{J^2}} \cos(\phi - \phi_0) + \frac{\mu\gamma}{J^2}} \\ r(\phi) &= \frac{\frac{J^2}{\mu\gamma}}{\alpha \cos(\phi - \phi_0) + 1} \quad \text{mit } \alpha = \underline{\text{def}} \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu\gamma^2}} \end{aligned} \quad (23)$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes

Diskussion des Resultates:

$$r + r' = 2a \Rightarrow r' = 2a - r$$

Nach dem cos-Satz gilt

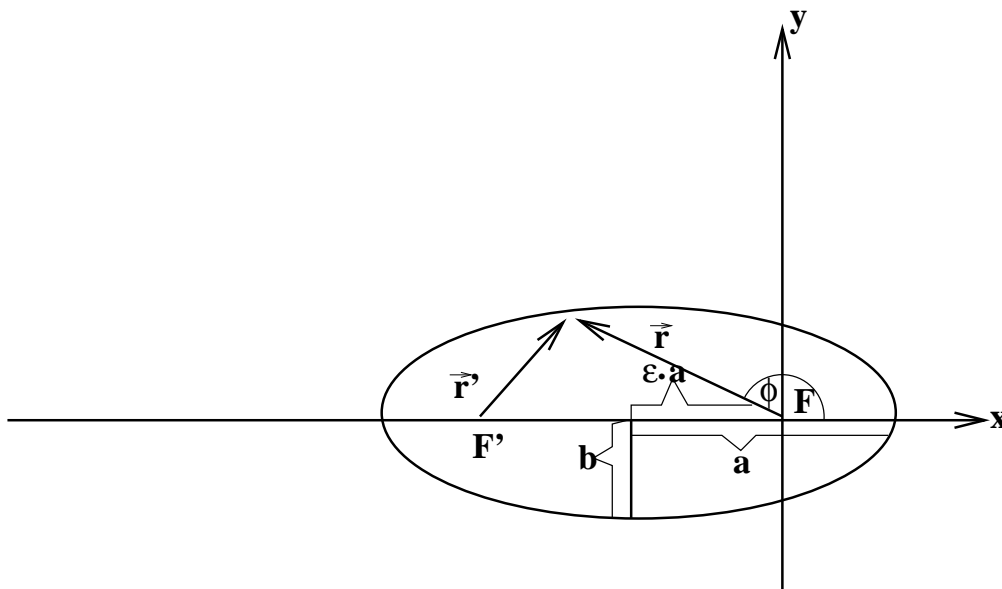


Abbildung 16: Ellipse

$$\begin{aligned}
 r'^2 &= r^2 + (2\epsilon a)^2 - 2r2\epsilon a \cos(\pi - \phi) \\
 4a^2 - 4ar + r^2 &= r^2 + 4\epsilon^2 a^2 + 4r\epsilon a \cos \phi \\
 a(1 - \epsilon^2) &= r(1 - \epsilon \cos \phi); \quad r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \phi} \\
 a^2 &= b^2 + \epsilon^2 a^2 \Rightarrow \\
 b &= a\sqrt{1 - \epsilon^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r' - r &= 2a \quad (\text{rechter Zweig}) \\
 r - r' &= 2a \quad (\text{linker Zweig}) \\
 r'^2 &= r^2 + (2\epsilon \cdot a)^2 - 2r2\epsilon a \cos(\pi - \phi) \\
 4a^2 \pm 4ar + r^2 &= r^2 + 4\epsilon^2 a^2 + 4\epsilon ar \cos \phi \\
 a(1 - \epsilon^2) &= r(\mp 1 + \epsilon \cos \phi) \\
 r &= \frac{a(1 - \epsilon^2)}{\mp 1 + \epsilon \cos \phi} \quad \text{rechter Zweig (-); linker Zweig (+)} \\
 \epsilon^2 a^2 &= a^2 + b^2 \Rightarrow \\
 b &= a\sqrt{\epsilon^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Diskussion des Erde-Sonne-Problems:

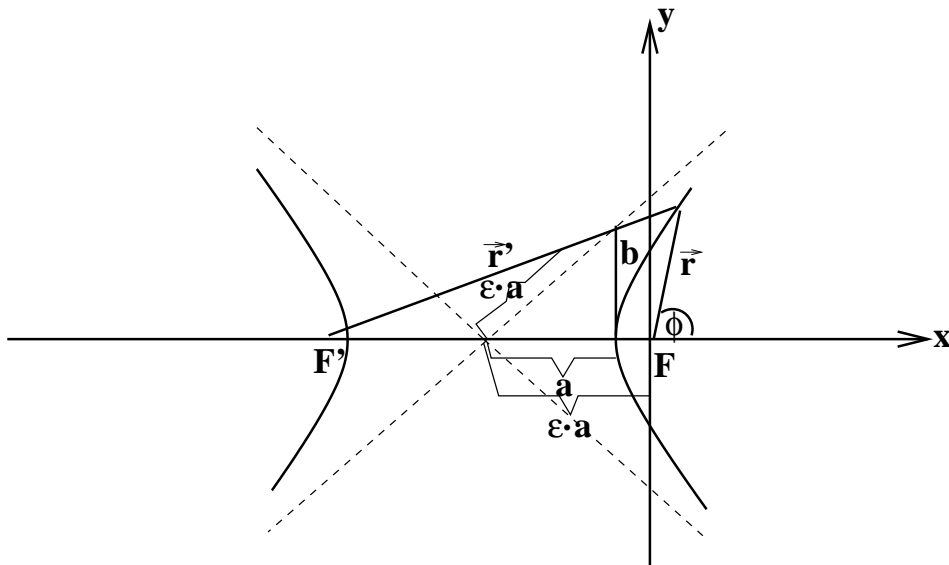


Abbildung 17: Hyperbel

$$\mu = \frac{m_E \cdot m_S}{m_E + m_S} = m_E$$

$$\gamma = Gm_E m_S$$

Wegen  $m_S \gg m_E$  liegt der Schwerpunkt des Systems beinahe im Sonnenmittelpunkt.  $\vec{r} = \vec{r}_E - \vec{r}_S$  beschreibt die Bahn der Erde um die Sonne. Wir hatten die Erdbahn berechnet zu:

$$r(\phi) = \frac{\frac{J^2}{\mu\gamma}}{1 + \alpha \cos \phi} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu\gamma^2}}$$

Vergleich mit

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\pm 1 + \varepsilon \cos \phi}$$

mit  $+1$ ;  $\varepsilon < 1$  Ellipse

mit  $\pm 1$ ;  $\varepsilon > 1$  Hyperbel

Man erkennt sofort  $\alpha \equiv \varepsilon$

Aus dieser Gleichung lassen sich Rückschlüsse auf die Energie ziehen.

$$\text{Ellipse: } (1 - \varepsilon^2) = 1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{\mu\gamma^2}\right) = \frac{-2EJ^2}{\mu\gamma^2} > 0 \Rightarrow E < 0$$

$$\text{Hyperbel: } (1 - \varepsilon^2) = 1 - \left(1 + \frac{2EJ^2}{\mu\gamma^2}\right) = \frac{-2EJ^2}{\mu\gamma^2} < 0 \Rightarrow E > 0$$

(1) Ellipse  $\varepsilon < 1, E < 0$ :

Berechnung der beiden Halbachsen:

$$\begin{aligned} a(1 - \varepsilon^2) &= \frac{J^2}{\mu\gamma} \Rightarrow a = \frac{J^2}{(1 - \varepsilon^2)\mu\gamma} \\ a &= -\frac{J^2}{\mu\gamma(2EJ^2/\mu\gamma^2)} = -\frac{\gamma}{2E} = -\frac{Gm_{EM_S}}{2E} \\ b &= a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = a\sqrt{-\frac{2EJ^2}{\mu\gamma^2}} = a\sqrt{-\frac{2E}{\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{J^2}{\mu\gamma}} = a\sqrt{\frac{J^2}{\mu\gamma a}} \end{aligned}$$

Berechnung der Umlaufzeit  $\tau$

$$\tau = \frac{F}{\dot{F}} = \frac{\pi ab}{J/(2 \cdot \mu)} \quad \text{mit } \dot{F} = \text{Flächengeschwindigkeit} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2\nu}{J} \pi a \cdot \underbrace{a \cdot \sqrt{\frac{J^2}{\mu\gamma a}}}_b \\ \Rightarrow \tau^2 &= \frac{4\mu^2}{J^2} \pi^2 a^4 \frac{J^2}{\mu\gamma a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau^2 = \frac{4\mu\pi^2}{\gamma} a^3 \quad \text{3. Kepler'sches Gesetz} \quad (26)$$

Kepler'sche Gesetze

Die Masse fällt im dritten Kepler'schen Gesetz raus, da  $\mu \approx m_E$ .

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt (1609)
2. Der Leitstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Drehimpulserhaltung) (1609)

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen (1618)

(2) Hyperbel:  $\varepsilon > 1$ ;  $E > 0$

Beispiele:

Komet von außerhalb des Sonnensystems (rechter Zweig)

Streuung von positiv geladenen Teilchen an Atomkernen (linker Zweig)

Den zweiten Fall wollen wir näher untersuchen.

Experiment von Geiger und Marsden:

Geiger und Marsden schossen  $\alpha$ -Teilchen ( ${}^4_2\text{He}_2$  - Kerne) auf eine so dünne Goldfolie, dass die Teilchen im Allgemeinen mit nur einem Goldatom wechselwirken konnten.

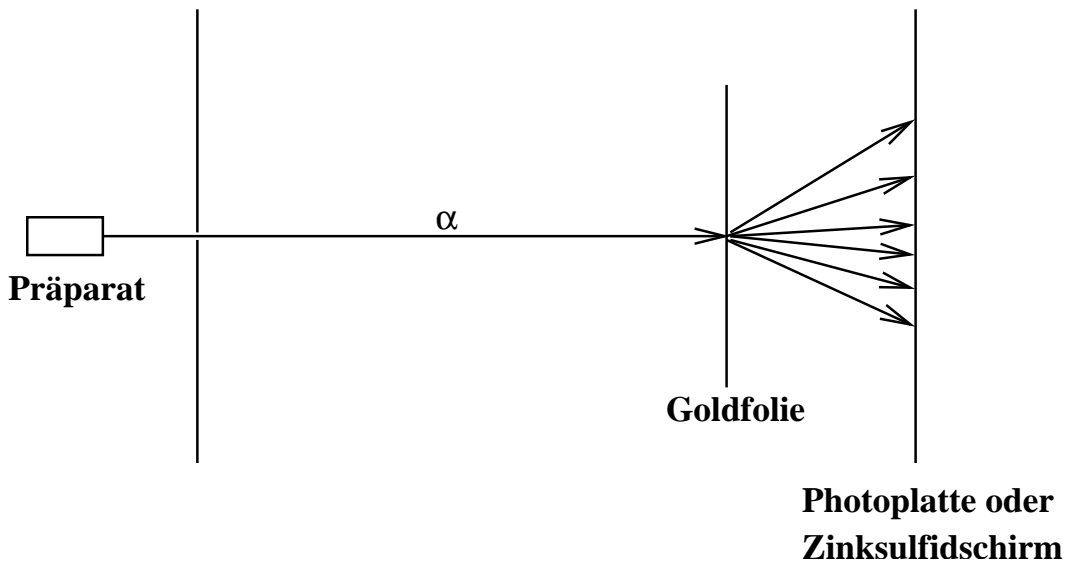


Abbildung 18:  $\alpha \equiv {}^4_2\text{He}_2$     Gold  $\equiv {}^{197}_{79}\text{Au}_{118}$

Wir erhalten das Potential zwischen  $\alpha$ -Teilchen und Au-Atom

$$U(r) = \frac{2e \cdot 79e}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{Au}|} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{12}}$$

$$\gamma = -Z_1 Z_2 e^2 \Rightarrow E > 0 \Rightarrow \text{Bahnkurve ist Hyperbel}$$

Da die Kraft abstoßend ist, müssen wir den linken Zweig (+) benutzen:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

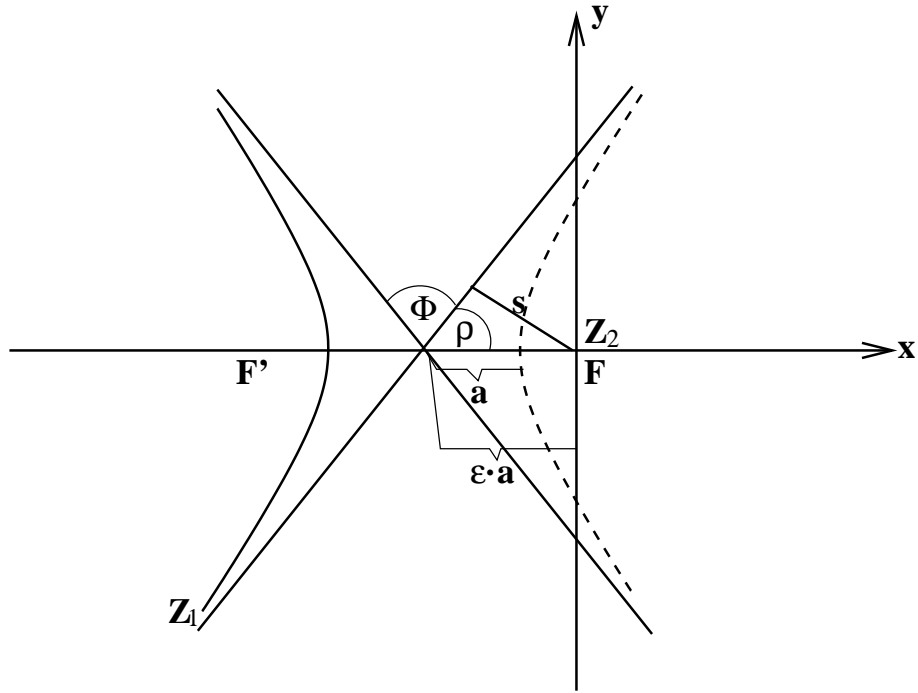


Abbildung 19:

$$\pi - \theta = 2\beta \Rightarrow \theta = \pi - 2\beta$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = -\operatorname{tg} \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{a}{a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = (\varepsilon^2 - 1)^{-1/2} = \left( \frac{2EJ^2}{\mu\gamma^2} - 1 \right)^{-1/2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \left( \frac{m_\alpha \gamma^2}{2EJ^2} \right)^{1/2} \mu = \frac{m_\alpha \cdot m_{Au}}{m_\alpha + m_{Au}}$$

wegen  $m_\alpha \ll m_{Au}$  gilt:  $\mu \simeq m_\alpha$

Die Energie berechnet sich zu:

$$E = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

$V_0$  = Geschwindigkeit vor dem Stoß

Der Drehimpuls berechnet sich zu:

$$J = |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot p \cdot \sin \alpha = p \cdot s$$

$s = \text{Sto\ssparameter}$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = f(s) = \sqrt{\frac{m_\alpha \gamma^2}{m_\alpha v_0^2 p^2 s^2}} = \frac{|\gamma|}{(m_\alpha^2 v_0^4 s^2)^{1/2}} = \frac{|\gamma|}{m_\alpha v_0^2 s} \quad (27)$$

Kleine Streuwinkel  
Gro\sser Streuwinkel

gro\sser Sto\ssparameter  $s$   
kleiner Sto\ssparameter  $s$

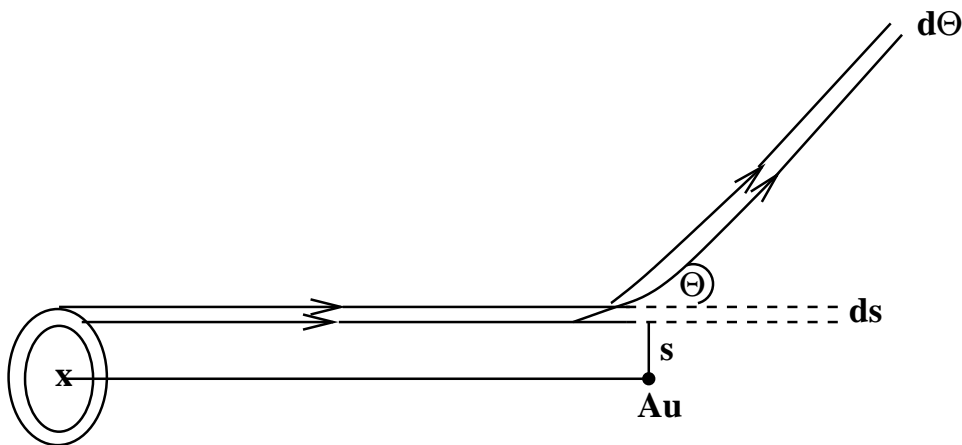


Abbildung 20:

Die Wahrscheinlichkeit, den Ring zwischen  $s$  und  $s + ds$  und damit Winkel zwischen  $\theta$  und  $\theta + d\theta$  zu treffen, ist proportional zur Fläche  $d\sigma = 2\pi s ds$ . Aus Gleichung (27) folgt

$$\frac{1}{2 \cos^2 \theta/2} d\theta = -\frac{|\gamma|}{m v_0^2} \frac{ds}{s^2} \quad (28)$$

Einsetzen von  $ds$  in die Flächengleichung ergibt (‘ - ‘ Zeichen entfällt, da Fläche positiv)

$$d\sigma = 2\pi s ds = \frac{2\pi s^3 m v_0^2}{2|\gamma| \cos^2 \theta/2} d\theta \quad (29)$$

Berechnung von  $s$  aus Gleichung (27) und einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\pi}{|\gamma|} \cdot \frac{|\gamma|^3}{(m v_0^2)^2} \cdot \frac{\cos^3 \theta/2}{\sin^3 \theta/2 \cos^2 \theta/2} d\theta = \pi \cdot \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{(m v_0^2)^2} \right)^2 \cdot \frac{\cos \theta/2}{\sin^3 \theta/2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m v_0^2} \right)^2 \cdot \frac{\sin \theta}{\sin^4 \theta/2} d\theta \end{aligned} \quad (30)$$

In Wirklichkeit hat man einen Strom von Teilchen  $j = \text{Teilchen}/(\text{sec } cm^2)$   
 $N(\theta) = \text{Teilchen}/\text{sec}$  gestreut in  $\triangleleft < \theta$

Damit erhält man den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{N(\theta + d\theta) - N\theta}{j \cdot n} [cm^2]$$

$n = \text{Anzahl der Targetteilchen}$

Diese Rutherford-Formel beschreibt das Experiment von Geiger und Marsden bis zu einem Stoßparameter von  $10^{-12}$  cm.

Darunter traten im Experiment Abweichungen auf.

Daraus schloss Rutherford, dass die Masse des Atoms in einem positiven Kern von  $\leq 10^{-12}$  cm konzentriert ist.

### 1.3 n wechselwirkende Teilchen

Wir nehmen an, es wirke zwischen allen Teilchen eine zentrale konservative Kraft.

$$\begin{aligned} \text{Zentral:} & \quad \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = f(\vec{r}_i, \vec{r}_j)(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ \text{Konservativ:} & \quad \vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}) = -\vec{\nabla}_i U_{ij}(\vec{r}_i; \vec{r}_j) \\ \text{beides:} & \quad \vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}) = f(r_{ij})(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_i U_{ij}(r_{ij}) \end{aligned}$$

mit:

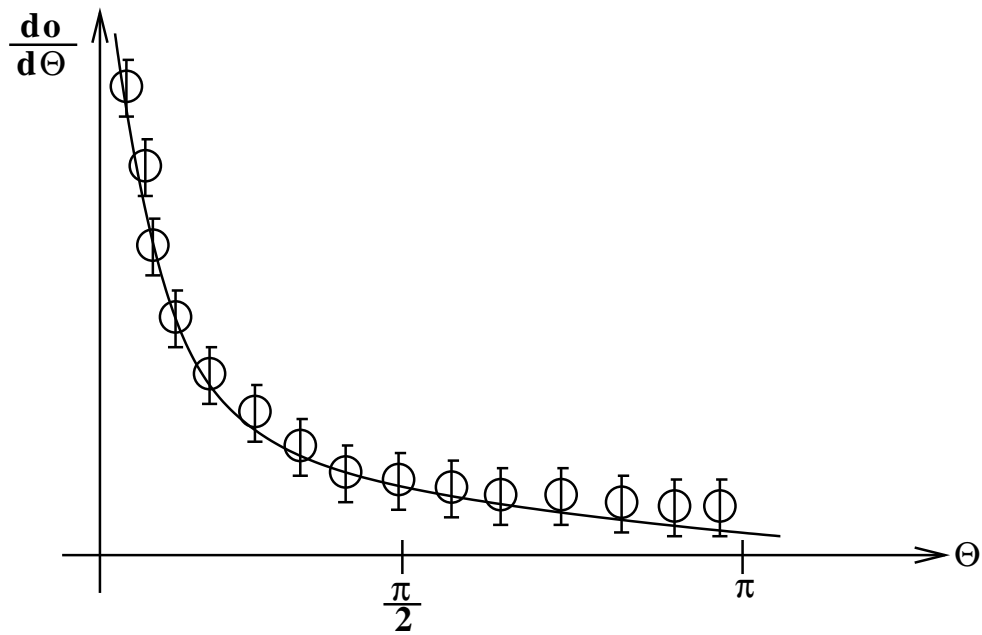


Abbildung 21: Der Rutherford'sche Wirkungsquerschnitt ist in der Quantenmechanik unverändert.

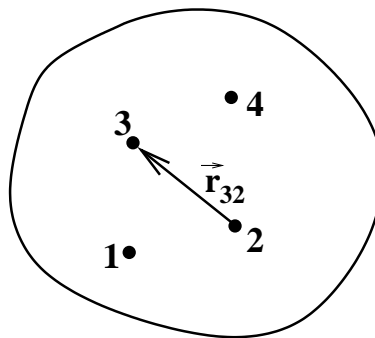


Abbildung 22:

$$\left[ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} r_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_{ij}} U_{ij}(r_{ij}) \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \end{aligned} \right]$$

Die Kraft, die total auf ein Teilchen  $i$  wirkt, berechnet sich als die Summe aller Einzelwechselwirkungen.

$$\vec{F}_i = \sum_{k(\neq i)} \vec{F}_{ik} = \sum_{k(\neq i)} -\vec{\nabla}_i U_{ik}(r_{ik})$$

Die Bewegungsgleichung heißt dann:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(r_1 \dots r_n) \quad 1 \leq i \leq n$$

Energiesatz:

$$E = T + U = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2 + \sum_{j<k}^n U_{jk}(r_{jk})$$

$j < k$  damit die potentielle Energie zwischen  $j$ -tem und  $k$ -tem Teilchen nicht doppelt gezählt wird.

Der Ansatz für die potentielle Energie ist durch die Kraft gerechtfertigt, wie jetzt gezeigt wird:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= -\vec{\nabla} \sum_{j<k} U_{jk}(r_{jk}) = -\vec{\nabla}_i \sum_{(i<)k} U_{ik}(r_{ik}) - \vec{\nabla}_i \sum_{j(<i)} U_{ji}(r_{ji}) \\ &= -\vec{\nabla}_i \sum_{k(\neq i)} U_{ik}(r_{ik}) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung der Energie = 0  $\Rightarrow$  Energieerhaltung

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \dot{E} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \ddot{\vec{r}}_j + \sum_{j \neq k} \vec{\nabla}_j U_{jk}(r_{jk}) \dot{\vec{r}}_j \\ &= \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \ddot{\vec{r}}_j + \sum_j -\vec{F}_j \dot{\vec{r}}_j \\ &= \sum_j (m_j \ddot{\vec{r}}_j - \vec{F}_j) \dot{\vec{r}}_j = 0 \\ \text{da } m_j \ddot{\vec{r}}_j &= \vec{F}_j \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \\
\dot{\vec{p}} &= \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = - \sum_{i \neq j=1}^n \vec{\nabla}_i U_{ij}(r_{ij}) \\
&= - \sum_{i \neq j=1}^n \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} = - \left( \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}} \right); \\
\text{da } \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \cdot \frac{1}{r_{ij}} &\text{ symmetrisch ist} \\
\dot{\vec{p}} &= - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} + \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}} \right) = 0 \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Drehimpulserhaltung:

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \\
\frac{d\vec{J}}{dt} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \quad \text{da } \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0 \\
&= - \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{\nabla}_i U_{ij}(r_{ij}) \\
&= - \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \\
\frac{d\vec{J}}{dt} &= - \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} \right) \\
&= \sum_{i \neq j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{1}{r_{ij}} (\vec{r}_i \times \vec{r}_j) = 0
\end{aligned}$$

da sich die  $\frac{\partial U_{ij}}{\partial r_{ij}} \frac{(\vec{r}_i \times \vec{r}_j)}{r_{ij}}$  in einer  $n \times n$  Matrix darstellen lassen, die wegen der Antisymmetrie des Vektorproduktes, anti-symmetrisch ist, und damit beim Aussummieren über alle Glieder ( $i \neq j$ ) verschwindet.

Virialsatz (bedeutsam für die Mechanik und Quantenmechanik):

Definition des Virials:

$$V \text{ (def)} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i; [V] = [\text{Arbeit}] = [\text{Energie}]$$

$$V = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{r}_i^2 \right) - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

$$V = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \right) - 2T$$

Wir bilden die zeitliche Mitteilung:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} V dt = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{d^2}{dt^2} \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 dt - 2\bar{T} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{d}{dt} \sum_i m_i r_i^2 \right]_t^{t+\Delta t} - 2\bar{T} \end{aligned}$$

Wenn wir annehmen, dass  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  endlich bleiben, so geht der erste Term wegen  $\Delta t \rightarrow \infty$  gegen 0. Somit ergibt sich der Virialsatz:

$$2\bar{T} - \bar{V} = 0 \quad (31)$$

Wir nehmen an,  $U(r)$  ist eine homogene Funktion des Grades  $g$  im konservativen Feld

$$U(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n c_i r_i^g$$

Daraus folgt

$$\vec{\nabla} r^g = \left( \frac{\partial}{\partial r} r^g \right) \cdot \vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} g r^{g-1}$$

Das Virial ist dann

$$\begin{aligned} V &= \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n) \cdot \vec{r}_i \\ &= - \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n) = -gU(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \end{aligned}$$

Aus dem Virialsatz folgt daher

$$\begin{aligned}2\bar{T} - g\bar{U} &= 0; & 2E &= 2\bar{T} + 2\bar{U} \\2E - (g+2)\bar{U} &= 0 \\(2+g)\bar{U} &= 2E, & (g+2)\bar{T} &= gE\end{aligned}$$

Anwendungen:

- Harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}ar^2 & g &\equiv 2 \\V = \vec{F} \cdot \vec{r} &\Rightarrow V = -ar^2 = -2U\end{aligned}$$

Nach Virialsatz folgt:

$$\bar{T} = \bar{U}; \quad E = 2\bar{U} = 2\bar{T}$$

- Coulombfeld, Gravitationsfeld

$$U = -\frac{\gamma}{r}; \quad g \equiv -1 \Rightarrow V = \frac{\gamma}{r}$$

Nach Virialsatz folgt:

$$E = -\bar{T}; \quad \bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{U}; \quad E = \frac{1}{2}\bar{U}$$