Anhang A

Dirac'sche Delta-Funktion

Die Dirac'sche Deltafunktion wurde 1927 von Dirac eingeführt, aber erst im Jahre 1950 von Schwartz in seiner Distributionstheorie mathematisch exakt als Limes einer Funktionenreihe erklärt.

A.1 Eigenschaften der δ-Funktion

1. $\delta(x - x_0) = 0 \qquad$ für $x \neq x_0$
2. $\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) dx = 1 \qquad$ für $x_1 < x_0 < x_2$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0)$
5. $\delta(f(x)) = \frac{1}{|\frac{df}{dx}|_{x=x_0}}\, \delta(x - x_0)$

Die δ-Funktion schließt mit der Achse also die Fläche 1 ein und ist nur in einem Punkt verschieden von Null. Mathematisch erklärt ist die δ-Funktion als Grenzwert einer Folge von Funktionen, die alle die Fläche 1 einschließen und deren von 0 verschiedener Bereich über einem immer enger werdenden Intervall liegt.

Beispiel für eine δ-Funktion ist der Limes einer Reihe von Gauß'schen Glockenfunktionen (Abbildung A.1 und A.2):

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

Auch schon in der klassischen Physik wird die δ-Funktion z.B. zur Lokalisation einer Punktladung und ihre Ableitung zur Festlegung eines elektrischen Dipols benutzt.

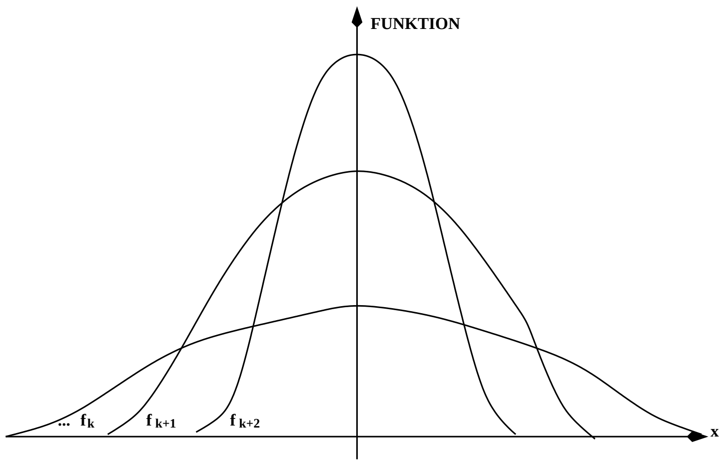

Abb. A.1:

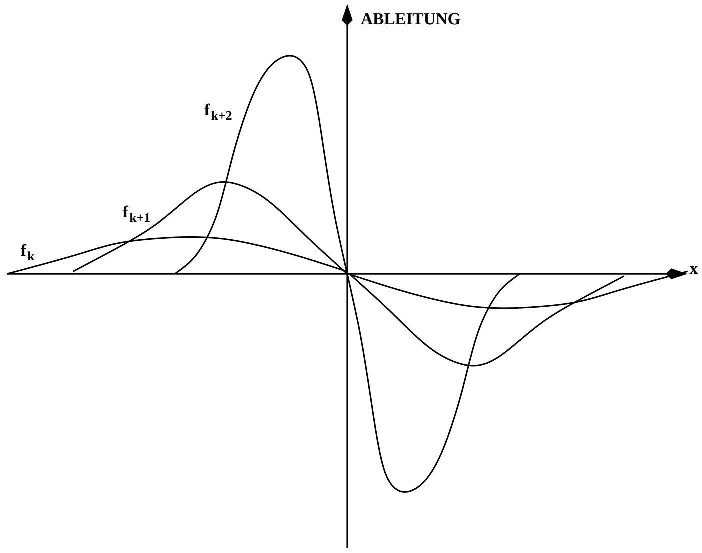

Abb. A.2:

Anhang B

Entwicklung in ein Orthogonal-System

Ein System von Funktionen $u_n(x)$ ist orthogoanl über einem Intervall $[a, b]$, wenn:

$$\int_a^b u_m^*(x)\, u_n(x)\, dx = \delta_{m,n} \tag{B.1}$$

(Orthogonalitätsrelation für ein Intervall $[a, b]$)

Für einen kontinuierlichen Index normiert man auf Delta-Funktionen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{k'}^*(x)\, u_k(x)\, dx = \delta(k - k') \tag{B.2}$$

(Orthogonalitätsrelation)

Ein Funktionssystem $u_n(x)$, das zur Approximation einer Funktion $f(x)$ benutzt wird,

$$f(x) \;\rightarrow\; \sum_{n=1}^{N} a_n\, u_n(x)$$

ist vollständig, wenn für die Größe

$$M_N = \int_a^b |f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n\, u_n(x)|^2\, dx$$

gilt:

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{N_0} (N > N_0 \;\rightarrow\; M_N < \epsilon)$$

d.h. $f(x)$ wird durch das System $u_n(x)$ mit den Gewichten a_n im obigen Sinne beliebig genau approximiert:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, u_n(x)$$

Wende darauf von links an:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b dx'\, u_m^*(x') \\
\int_a^b dx'\, u_m^*(x')\, f(x) &= \int_a^b dx'\, u_m^*(x') \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, u_n(x) \right) \\
\int_a^b u_m^*(x')\, f(x)\, dx' &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int_a^b u_m^*(x')\, u_n(x)\, dx' \right) \\
\int_a^b u_m^*(x')\, f(x)\, dx' &\overset{(B.1)}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \delta_{m,n} = a_m
\end{aligned}
$$

Damit sind die Koeffizienten a_n gewonnen und wir können einsetzen in $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, u_n(x) \\
f(x) &= \int_a^b dx' \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x')\, u_n(x) \right) f(x')
\end{aligned}
$$

Das bedeutet aber nach Eigenschaft 3) der δ-Funktion (siehe Anhang A):

$$
\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x')\, u_n(x) = \delta(x - x') \tag{B.3}
$$

(Vollständigkeitsrelation für diskreten Index)

Führt man einen kontinuierlichen Index k ein, so erhält man:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} u_k^*(x')\, u_k(x)\, dk = \delta(x - x') \tag{B.4}
$$

(Vollständigkeitsrelation)

B.1 Beispiel:

Das System der ebenen Wellen

$$
u_k(x) = C\, e^{ikx}
$$

bildet ein vollständiges System, wie man durch Einsetzen in (B.4) nachweisen kann. Wir berechnen hier die Normierungskonstante C und bestätigen gleichzeitig, dass (B.4) gilt und damit die ebenen Wellen ein vollständiges System bilden.

Wir integrieren über (B.4) mit $\int_{x_1}^{x_2} dx$:

$$
\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{\infty} C\, e^{-ikx'}\, C\, e^{ikx}\, dk = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta(x - x') = 1
$$

Das Integral über x (nicht über x'!) wird ausgeführt:

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, C^*\, C\, \frac{1}{ik} \left[e^{ik(x-x')} \right] \Bigg|_{x=x_1}^{x=x_2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, C^*\, C\, \frac{1}{ik} \cdot \left[e^{ik(x_2-x')} - e^{-ik(x_1-x')} \right]
\end{aligned}
$$

Zur Auswertung der beiden Integrale benötigen wir den Residuensatz. Wir schlagen folgenden Integrationsweg ein:

Außerdem heben wir den Pol P noch um das Stück $i\epsilon$, d.h. wir setzen:

$$k = k + i\epsilon$$

Damit erhält die Integration keinen Beitrag, weil die entstehenden Zusatzterme für $k \to \infty$ gegen 0 gehen, wenn wir den oberen Halbkreis durchlaufen.

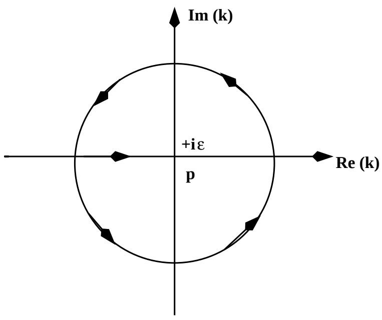

Abb. B.1:

Mit dem Residuensatz ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \, \frac{1}{ik} \, e^{ik(x_2 - x')} = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i = 2\pi$$

Das Integral über den unteren Halbkreis verschwindet, weil dort kein Pol liegt!

$$\Longrightarrow 1 = 2\pi C^* \, C = 2\pi |C|^2$$

Die Normierungskonstante C hat den Wert

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \Longrightarrow u_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{ikx} \end{aligned}$$

ist ein vollständiges Orthonormalsystem. q.e.d.

Anhang C

Konfluente hypergeometrische DGL

<u>Behauptung:</u>
Eine Lösung der Differentialgleichung

$$y\,f''(y) + (c-y)\,f'(y) - a\,f(y) = 0 \tag{C.1}$$

ist die Funktion

$$f(y) = {}_1F_1(a;\,c;\,y)$$

wobei definiert ist

$${}_1F_1(a;\,c;\,y) = 1 + \frac{a}{c}\,\frac{y}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\,\frac{y^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\,\frac{y^3}{3!} + \ldots$$

oder, mit der Konvention:

$$\begin{aligned}
(a)_0 &= 1 \\
(a)_\nu &= a(a+1)\,\ldots\,(a+\nu-1) \\
{}_1F_1\,(a;\,c;\,y) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu}{(c)_\nu}\,\frac{y^\nu}{\nu!}
\end{aligned}$$

Beweis durch Einsetzen der vermuteten Lösun in (C.1)

$$y\,f''(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)\,\frac{(a)_\nu}{(c)_\nu}\,\frac{y^{\nu-1}}{\nu!} = \sum_{\nu=-1}^{\infty} (\nu+1)\,\nu\,\frac{(a)_{\nu+1}}{(c)_{\nu+1}}\,\frac{y^\nu}{(\nu+1)!}$$

wobei im letzten Schritt ν durch $\nu+1$ ersetzt wird, gleichzeitig aber bei -1 angefangen wird zu summieren (dieser erste Term verschwindet).

$$\begin{aligned}
c\,f'(y) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} c\,\nu\,\frac{(a)_\nu}{(c)_\nu}\,\frac{y^{\nu-1}}{\nu!} = \sum_{\nu=-1}^{\infty} c(\nu+1)\,\frac{(a)_{\nu+1}}{(c)_{\nu+1}}\,\frac{y^\nu}{(\nu+1)!} \\
-y\,f'(y) &= -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu}{(c)_\nu}\,\frac{y}{\nu!} \\
-a\,f(y) &= -\sum_{\nu=0}^{\infty} a\,\frac{(a)_\nu}{(c)_\nu}\,\frac{y}{\nu!}
\end{aligned}$$

Die Addition dieser Terme müsste Null ergeben. Wir schauen uns nur eine Potenz von y an. Wenn für diese die Addition Null ergibt, gilt das für alle Potenzen, also für die ganze Summe!

$$
\begin{aligned}
&\Big(y\, f''(y) + c\, f'(y) - y\, f'(y) - a\, f(y)\Big)\\
=&\ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu}{(c)_\nu} \frac{y^\nu}{\nu!} \left((\nu+1)\, \frac{a+\nu}{c+\nu}\, \frac{1}{(\nu+1)} + (\nu+1)\, \frac{c(a+\nu)}{c+\nu}\, \frac{1}{(\nu+1)} - \nu - a \right)\\
=&\ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu}{(c)_\nu} \frac{y^\nu}{\nu!} \left(\frac{a\nu + \nu^2 + ca + c\nu - c\nu - \nu^2 - ca - \nu a}{c+\nu} \right)\\
=&\ 0 \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

Damit ist nachgewiesen, dass ${}_1F_1\,(a;\,c;\,y)$ eine Lösung der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung (C.1) ist. Eine homogene Differentialgleichung[1] hat aber zwei linear unabhängige Lösungen. Die allgemeine Lösung erhält man durch Linearkombination dieser linear unabhängigen Lösungen.

$$
f(y) = D_1\, {}_1F_1\,(a;\,c;\,y) + D_2\, y^{1-C}\, {}_1F_1\,(a-c+1;\,2-c;\,y) \tag{C.2}
$$

Die Bestätigung des zweiten Teils der Lösung erhält man wieder durch Einsetzen der Potenzreihe.

Wichtige Spezialfälle von ${}_1F_1\,(a;\,c;\,y)$:

1. $a = -n$**;** $n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow&\quad {}_1F_1\,(a;\,c;\,y)\\
=&\quad {}_1F_1\,(-n;\,c;\,y)\\
=&\quad 1 - \frac{n}{c}\,\frac{y}{1!} + \frac{n(n-1)}{c(c+1)}\,\frac{y^2}{2!} + \ldots (-)^n \cdot \frac{n(n-1)(n-1)\ldots 1}{c(c+1)(c+2)\ldots(c+n-1)}\,\frac{y^n}{n!}
\end{aligned}
$$

   Da irgendwann der Faktor $(n-n)$ im Zähler auftaucht, bricht die Potenzreihe ab. Für $a = -n$ ist also ${}_1F_1\,(-n;\,c;\,y)$ ein Polynom der Ordnung n.

2. $y \to \pm\infty$**:**
   Für $y \to \pm\infty$ geht ${}_1F_1\,(a;\,c;\,y)$ über in:

$$
\begin{aligned}
a)&\qquad {}_{y\to\pm\infty}\,{}_1F_1\,(a;\,c;\,y) &=&\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\, e^\nu\, y^{a-c}\\
b)&\qquad {}_{y\to-\infty}\,{}_1F_1\,(a;\,c;\,y) &=&\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}\, |y|^{-a}
\end{aligned}
$$

   Zur Gammafunktion $\Gamma(z)$:
   Die Funktion $\Gamma(z)$ ist eine Erweiterung der Fakultät $(n!)$, die nur für positive ganze Zahlen definiert ist, auf die komplexe Zahlenebene. $\Gamma(z)$ ist eindeutig definiert durch die Funktionalgleichung

$$
z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)
$$

   den Zusammenhang mit der Fakultät

$$
\Gamma(n+1) = n!
$$

   und der Forderung, dass sie in einem Einheitsintervall auf der positiven reellen Achse regulär sein muss. P hat Pole an den Stellen $z = 0,\,-1,\,-2,\,\ldots,$ denn

[1] 2. Ordnung

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Der Pol bei $z = -n$ hat das Residuum (man benutze $\Gamma(1) = 1$):

$$\frac{(-)^n}{n!}$$

3. **Laguerre'sche Polynome:**
   Diese sind definiert mit:

$$L_n^{(m)}(y) = \frac{(n+m)!}{n!m!} \, {}_1F_1\left(-n;\, m+1;\, y\right)$$

Auch hier handelt es sich wieder um Polynome, da a eine ganze Zahl ist. Die Laguerre'schen Polynome bilden ein vollständiges Orthonormalsystem auf dem Intervall $(0,\, \infty)$ mit der Belegungsfunktion (Gewichts-) e^{-y}.

4. **Hermitesche Polynome:**
   Auch diese kann man mit der Konfluenten ${}_1F_1\,(a;\, c;\, y)$ definieren:

$$\begin{aligned}
H_{2n}(y) &= (-)^n \frac{(2n)!}{n!} \, {}_1F_1 \left(-n;\, \frac{1}{2};\, y^2 \right) \quad \text{(gerade Hermitesche Polynome)} \\
H_{2n+1}(y) &= (-)^n \frac{(2n+1)!}{n!} \, 2y \, {}_1F_1 \left(-n;\, \frac{3}{2};\, y^2 \right) \quad \text{(ungerade Hermit. Polynome)}
\end{aligned}$$

Sie sind ein vollständiges Orthogonalsystem über den reellen Zahlen $(\langle -\infty,\, +\infty \rangle)$ mit der Belegungsfunktion e^{-y^2}.

$$\begin{aligned}
H_0(y) &= 1 \\
H_1(y) &= 2y \\
H_2(y) &= -2 \left(1 - \frac{2}{1} \frac{y^2}{1!} \right) = 4y^2 - 2 \\
H_3(y) &= -6 \cdot 2y \left(1 - \frac{2}{3} y^2 \right) = 8y^3 - 12y \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Man kann die Hermiteschen Polynome auch erzeugen durch Differenzieren einer Erzeugenden:

$$H_n(y) = (-)^n \, e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

Anhang D

Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Spezialfall: $s = \frac{1}{2}$
In diesem Spezialfall ließ sich $|jm\rangle$ als Linearkombination von zwei Vektoren schreiben:

$$
\begin{aligned}
|jm\rangle \quad &= \quad |\ell, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \, C \left(\ell \, \frac{1}{2} \, j | m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m \right) \\
&\quad + |\ell, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \, C \left(\ell \, \frac{1}{2} \, j | m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, m \right)
\end{aligned}
$$

Dafür schreiben wir abkürzend:

$$
|jm\rangle = |m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \, C^+ + |m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \, C^-
$$

Anwenden von $\vec{j}^2$:

$$
\hbar^2 \, j(j+1) |jm\rangle = \vec{j}^2 |m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \, C^+ + \vec{j}^2 |m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \, C^-
$$

Von links mit $\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}|$ bzw. $\langle m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|$ multiplizieren:

$$
\begin{aligned}
\hbar^2 \, j(j+1) \, C^+ \quad &= \quad \left\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \, |\vec{j}^2| m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle C^+ \\
&\quad + \left\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \, |\vec{j}^2| m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle C^- \\
\hbar^2 \, j(j+1) \, C^- \quad &= \quad \left\langle m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \, |\vec{j}^2| m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle C^+ \\
&\quad + \left\langle m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \, |\vec{j}^2| m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle C^-
\end{aligned}
$$

Das ist das Gleichungssystem zur Bestimmung von C^+ und C^-; als Matrizengleichung (Eigenwertgleichung) sieht es so aus:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}
\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \, |\vec{j}^2| m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle & \langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \, |\vec{j}^2| m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\
\langle m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \, |\vec{j}^2| m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle & \langle m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \, |\vec{j}^2| m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix} \\
= \hbar^2 \, j(j+2) \begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix} \\
A \cdot \vec{C} = \hbar^2 \, j(j+1) \, \vec{C}
\end{aligned}
$$

Das Problem bei der Diagonalisierung dieser Matrix liegt nur noch in der expliziten Berechnung der Elemente. Dazu bemerken wir: $\vec{j}^2$ zerfällt bezüglich des Systems $|m-\Sigma,\,\Sigma\rangle$ in einen diagonalen und einen nichtdiagonalen Term.

$$\vec{j}^2 = \underbrace{\vec{l}^2 + \vec{s}^2 + 2\ell_z\,s_z}_{\text{diagonal}} + \underbrace{\ell_+ s_- + \ell_- s_+}_{\text{nichtdiagonal}}$$

Damit sehen wir sofort in der Hauptdiagonalen:

$$\begin{aligned}
\left\langle m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\,|\vec{j}^2|m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right\rangle &= \left\langle \ell,\,m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\,|\vec{j}^2|\ell,\,m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= \ell(\ell+1)\hbar^2 + \frac{3}{4}\,\hbar^2 + 2\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)\hbar\cdot\frac{1}{2}\,\hbar \\
&= \ell(\ell+1)\hbar^2 + \frac{3}{4}\,\hbar^2 + \left(m-\frac{1}{2}\right)\hbar^2 \\
\left\langle m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\,|\vec{j}^2|m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right\rangle &= \left\langle \ell,\,m+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\,|\vec{j}^2|\ell,\,m+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= \ell(\ell+1)\hbar^2 + \frac{3}{4}\,\hbar^2 + 2\left(m+\frac{1}{2}\right)\hbar\left(-\frac{1}{2}\right)\hbar \\
&= \ell(\ell+1)\hbar^2 + \frac{3}{4}\,\hbar^2 + \frac{3}{4}\,\hbar^2 - \left(m+\frac{1}{2}\right)\hbar^2
\end{aligned}$$

Hält man sich vor Augen, dass ein von Null verschiedenes Ergebnis in der Nebendiagonalen nur dann zu erwarten ist, wenn s_+ auf $|-\frac{1}{2}\rangle$ oder s_- auf $|\frac{1}{2}\rangle$ operiert, so ist klar, dass übrig bleibt:

$$\begin{aligned}
\left\langle m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\,|\ell_- s_+|m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right\rangle &= \hbar^2\sqrt{\left(\ell-m+\frac{1}{2}\right)\left(\ell+m+\frac{1}{2}\right)} \\
\left\langle m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\,|\ell_+ s_-|m-\frac{1}{2},\,+\frac{1}{2}\right\rangle &= \hbar^2\sqrt{\left(\ell+m+\frac{1}{2}\right)\left(\ell-m+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt (vgl. 6.2) für $\ell \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\ell_+|\ell,\,m-\frac{1}{2}\rangle &= \hbar\sqrt{\left[\ell-\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]\left(\ell+m-\frac{1}{2}+1\right)}\,|\ell,\,m+\frac{1}{2}\rangle \\
\ell_-|\ell,\,m+\frac{1}{2}\rangle &= \hbar\sqrt{\left(\ell+m+\frac{1}{2}\right)\left[\ell-\left(m+\frac{1}{2}\right)+1\right]}\,|\ell,\,m-\frac{1}{2}\rangle \\
s_+|-\frac{1}{2} &= \hbar|\,\frac{1}{2}\rangle \\
s_-|+\frac{1}{2}\rangle &= \hbar|-\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

Dann lautet die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \ell(\ell+1)+\frac{3}{4}+(m-\frac{1}{2}) & \sqrt{(\ell-m+\frac{1}{2})\,(\ell+m+\frac{1}{2})} \\ \sqrt{(\ell+m+\frac{1}{2})\,(\ell-m+\frac{1}{2})} & \ell(\ell+1)+\frac{3}{4}-(m+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{j(j+1)}_{\mu}\begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix}$$

Auf beiden Seiten haben wir $\hbar^2$ weggelassen. Die Säkulargleichung zur Bestimmung von μ heißt:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \ell(\ell+1)+\frac{1}{4}+m-\mu & \sqrt{(\ell-m+\frac{1}{2})\,(\ell+m+\frac{1}{2})} \\ \sqrt{(\ell+m+\frac{1}{2})\,(\ell-m+\frac{1}{2})} & \ell(\ell+1)+\frac{1}{4}-m-\mu \end{vmatrix} &= 0 \\
\left[\ell(\ell+1)+\frac{1}{4}-\mu\right]^2 - m^2 - \left(\ell-m+\frac{1}{2}\right)\left(\ell+m+\frac{1}{2}\right) &= 0 \\
\left[\ell(\ell+1)+\frac{1}{4}-\mu\right]^2 - \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mu &= \mp\left(\ell+\frac{1}{2}\right)+\ell(\ell+1)+\frac{1}{4} \\
\mu &= \mp\left(\ell+\frac{1}{2}\right)+\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Setzen wir für μ wieder $j(j+1)$ ein, so haben wir erhalten:

$$j(j+1) = \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 \mp \left(\ell+\frac{1}{2}\right)$$

Wir suchen die positiven Lösungen dieser Gleichung. Sie lauten hier, wie man sich sofort überzeugt:

$$\begin{aligned}
j_1 &= \ell+\frac{1}{2} \\
j_2 &= \ell-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Bahndrehimpuls genau zwei Möglichkeiten hat, mit dem Spin $s=\frac{1}{2}$ zu einem Gesamtdrehimpuls zu koppeln. Eine Ausnahme ist der Fall $\ell=0$. Dann ergibt nämlich die Anwendung von $\ell_\pm$ stets 0 und das alte System ist zugleich Eigensystem des Gesamtdrehimpulses.

Setzen wir $j_1 = \ell+\frac{1}{2}$ in die Matrizengleichung ein, so erhalten wir zur Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\left\{\ell(\ell+1)+\frac{1}{4}+m\right\}C^+ + \sqrt{\left(\ell-m+\frac{1}{2}\right)\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}\,C^- \\
= \left\{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\right\}C^+
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist linear abhängig, bringt also nichts Neues.

Umformungen:

$$
\begin{aligned}
\left\{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2+m\right\}C^+\sqrt{\left(\ell-m+\frac{1}{2}\right)\left(\ell+m+\frac{1}{2}\right)}C^- &= \\
\left\{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\right\}C^+ & \\
-\left(\ell+\frac{1}{2}-m\right)C^+ + \sqrt{\left(\ell-m+\frac{1}{2}\right)\left(\ell+m+\frac{1}{2}\right)}C^- &= 0 \\
-\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}-m\right)}C^+ + \sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}+m\right)}C^- &= 0
\end{aligned}
$$

Das muss für alle m und l gelten. Daher folgt:

$$
\begin{aligned}
C^+ &= C\left(\ell,\,\frac{1}{2},\,\ell+\frac{1}{2}\,|m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,m\right) = N\cdot\sqrt{\ell+\frac{1}{2}+m} \\
C^- &= C\left(\ell,\,\frac{1}{2},\ell+\frac{1}{2}\,|m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2},\,m\right) = N\cdot\sqrt{\ell+\frac{1}{2}-m}
\end{aligned}
$$

Dabei ist N ein Normierungsfaktor. Er wird durch die Forderung $\langle jm,\,jm\rangle = 1$ und C^+, C^- reel bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\langle jm,\,jm\rangle &= C^{+^2}\underbrace{\left\langle m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\,|m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right\rangle}_{1} + C^{-^2}\underbrace{\left\langle m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\,|m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right\rangle}_{1} \\
1 &= N^2\left(\ell+\frac{1}{2}+m\right)+N^2\left(\ell+\frac{1}{2}-m\right) \\
&= N^2\,(2\ell+1)
\end{aligned}
$$

Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
C\left(\ell,\,\frac{1}{2},\,\ell+\frac{1}{2}\,|m-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,m\right) &= \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}+m}{2\ell+1}} \\
C\left(\ell,\,\frac{1}{2},\,\ell+\frac{1}{2}\,|m+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2},\,m\right) &= \sqrt{\frac{\ell+\frac{1}{2}-m}{2\ell+1}}
\end{aligned}
$$

Wer Lust hat, kann den Fall $j=\ell-\frac{1}{2}$ selbst ausrechnen.