

Kapitel 1

Einleitung

Ausgearbeitet von Alfred Dandyk

Nach der Entdeckung der Maxwell-Gleichungen (1864) schienen alle grundsätzlichen Probleme der Physik gelöst zu sein. Man war sicher, Theorien zu besitzen, die alle Phänomene aus dem Bereich der Physikalischen Forschung erklären konnten. Doch schon bald geriet der Glaube an die Allgemeinheit dieser Theorie ins Wanken. Eines der ersten Experimente, das der Allgemeinheit der klassischen Physik widersprach, war das Michelson-Morley-Experiment (1887), dessen spätere theoretische Interpretation zeigen sollte, dass die der klassischen Mechanik zugrunde liegende Galilei-Transformation nicht generell gültig ist, sondern nur einen Grenzfall der allgemeineren Lorentz-Transformationen darstellt. Weniger populär, aber deswegen nicht weniger wichtig ist ein anderes Experiment geworden, das etwa um die gleiche Zeit ausgeführt wurde und dem hier mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden soll. Das Experiment:

über die Strahlung des schwarzen Körpers

Ein schwarzer Körper ist ein Gegenstand, der das gesamte Spektrum einer auffallenden elektromagnetischen Strahlung absorbiert. Nach einer gewissen Zeit befindet sich dieser Körper im statistischen Gleichgewicht mit dem Strahlungsfeld, d.h. er emittiert und absorbiert die gleiche Strahlungsenergie pro Zeiteinheit. Eine mögliche Realisierung eines schwarzen Körpers ist der Hohlraumstrahler ein Hohlraumkörper mit gut reflektierenden Innenwänden und einer kleinen Öffnung. Durch eine Öffnung dringt elektromagnetische Strahlung in den Innenraum des Körpers. Diese Strahlung wird an den Wänden reflektiert und sammelt sich im Hohlraum. Nach einiger Zeit tritt aus der Öffnung die gleiche Strahlungsmenge aus, wie in die Öffnung eintritt.

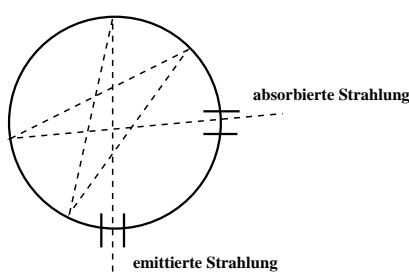


Abb. 1.1: Skizze eines Hohlraumstrahlers

Man untersuchte die spektrale Energieverteilung der austretenden Strahlung und fand folgendes Ergebnis:

Die nach den Methoden der klassischen Thermodynamik und Elektrodynamik gemachten Berechnungen ergaben das so genannte Rayleigh-Jeanssche Gesetz:

$$I \sim \omega^2 K T$$

K = Boltzmannkonstante
 ω = Kreisfrequenz
 T = Temperatur

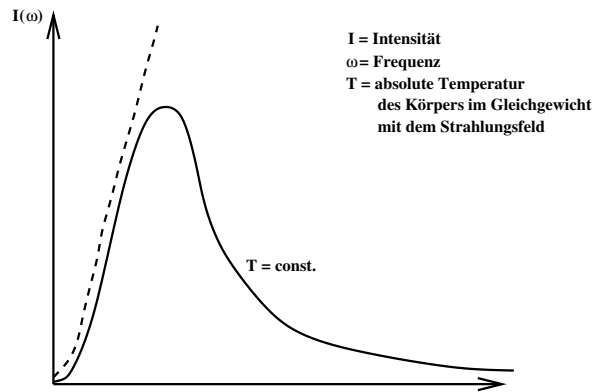


Abb. 1.2: Spektrale Frequenz- oder Energieverteilung der Strahlung eines schwarzen Körpers

Die entsprechende Kurve ist in Abbildung 1.2 gestrichelt gezeichnet. Hier liegt offensichtlich ein schwerwiegender Widerspruch zwischen Theorie und Experiment vor.

Max Planck konnte dieses Ergebnis erklären, indem er folgende zusätzliche Annahme machte: der Energieaustausch zwischen Strahlungsfeld und Körper erfolgt nicht kontinuierlich, sondern nur in diskreten Paketen. Jedes Paket hat eine Energie $E = \hbar\omega$, wobei ω wieder die Frequenz der Strahlung bedeutet. Diese Annahme führte Planck zu seiner berühmten Strahlungsformel:

$$E(\omega, t) \sim \omega^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$$

die sehr gut mit dem Experiment übereinstimmt. Interessant ist, dass für große ω dieser Ausdruck in die Formel für Boltzmann-Verteilung der klassischen Statistik übergeht. Die Konstante \hbar lässt sich aus der Kurve bestimmen:

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-17} \text{ erg sec.}$$

Die Annahme dieser hypothetischen Energiequanten ist natürlich mit der klassischen Elektrodynamik nicht zu vereinbaren. Max Planck selbst wollte sie anfangs auch nur in Form eines "heuristischen Standpunkts" gelten lassen.

1.1 Der Photoeffekt

Im Jahre 1902 unternahm Philipp Lenard folgendes Experiment: Er bestrahlte ein Target aus Alkalimetall mit monochromatischem UV-Licht und maß die kinetische Energie der austretenden Elektronen mit Hilfe einer Gegenspannung:

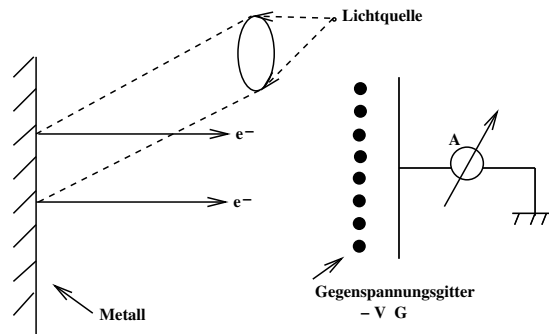


Abb. 1.3:

Lenard stellte dabei fest, dass

1. der Photostrom ohne Zeitverzögerung einsetzt,
2. die Energie der Elektronen nicht von der Intensität des einfallenden Lichtes abhängt,
3. die Energie der Elektronen der Frequenz des einfallenden Lichtes direkt proportional ist.

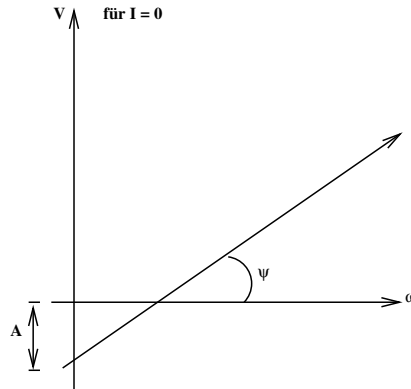


Abb. 1.4:

V_G bedeutet die minimale Gegenspannung, bei der kein Strom messbar ist. Es gilt dann:

$$V_G = E_{kin} = \tan \psi \cdot \omega - A$$

wobei E_{kin} die maximale kinetische Energie der austretenden Elektronen bedeutet. A wird durch Extrapolation der Geraden bestimmt.

Auch dieses Ergebnis ist mit der klassischen Physik nicht zu vereinbaren. Wir wollen uns das klar machen. Die aus dem Metall geschlagenen Elektronen können ihre kinetische Energie nur von der elektromagnetischen Welle übernommen haben. Die Energie der Welle in einem bestimmten Volumen beträgt $E \sim \int_V (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) dV$.

Ändert man nun die Intensität des Lichtes ($J \sim \vec{E}^2$), dann müsste sich das auf die kinetische Energie der Elektronen auswirken. Die auf das Elektron wirkende Kraft ist ja dem elektrischen Feldvektor direkt proportional ($\vec{F} = e \cdot \vec{E}$), so dass die kinetische Energie der Elektronen mit wachsender Intensität ansteigen müsste.

Einstein gelang 1905 die Erklärung. Er nahm die von Planck als "heuristischen Standpunkt" erfundenen Lichtquanten ernst, nannte sie Lichtteilchen (später Photonen genannt) und beschrieb den ganzen Vorgang als einen einfachen Stoßprozess zwischen Teilchen. Jedes Photon überträgt seine Energie $E = \hbar\omega$ dabei auf ein Elektron. Damit das Elektron aus dem Metall austreten kann, muss es eine bestimmte Ablösearbeit verrichten. Für die kinetische Energie des freien Elektrons gilt also:

$$E_{kin} = \hbar\omega - \text{Ablösearbeit}$$

Das stimmt mit dem experimentellen Ergebnis überein, wenn wir $\hbar = \tan \psi$ sowie $A = \text{Ablösearbeit}$ setzen. Rechnet man \hbar numerisch aus, dann stimmt dieser Wert tatsächlich mit dem schon von Planck bestimmten Wert für \hbar genau überein. Das ist natürlich ein starkes Indiz für die reale Existenz der Photonen.

1.2 Der Compton-Effekt (1924)

Betrachten wir folgendes Experiment:

Die aus der Röntgenröhre kommenden Röntgenstrahlen werden monochromatisiert und auf ein Material mit schwach gebundenen Elektronen geschickt (Metall). Man beobachtet eine Streuung der Röntgenstrahlen. Dabei stellt man fest, dass sich die Wellenlänge der gestreuten Strahlen gegenüber der der einfallenden Strahlen in Abhängigkeit vom Streuwinkel Θ ändert, und zwar gilt:

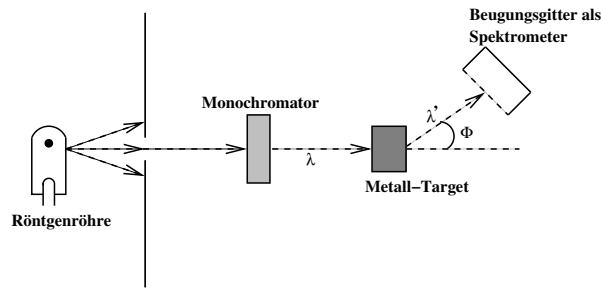


Abb. 1.5:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 4\pi p \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

$$p = \text{Konstante}$$

Als Spektrometer nehmen wir ein Beugungsgitter. Mit diesem können wir ja durch Ausmessen des Interferenzbildes die Wellenlänge der Röntgenstrahlen bestimmen.

Auch dieses Ergebnis bereitete den theoretischen Physikern Sorge. Es ließ sich trotz aller Anstrengungen nicht aus den klassischen Gesetzen vorhersagen. Wir können uns das leicht klar machen. Nach den klassischen Vorstellungen entsteht die gestreute Strahlung durch das Mitschwingen der Elektronen im elektromagnetischen Feld. Die Schwingfrequenz und damit die gestreute Strahlung stimmten aber genau mit der Frequenz der einfallenden Strahlung überein, d.h. es dürfte keine Frequenzverschiebung zwischen einfallender und gestreuter Strahlung feststellbar sein, vorausgesetzt, dass keine Doppler-Effekte zu erwarten sind.

Dagegen gelingt die Vorhersage leicht, wenn man auf das Photonenmodell zurückgreift und den Vorgang wieder als Stoßprozess zwischen Teilchen betrachtet Abbildung 1.6.

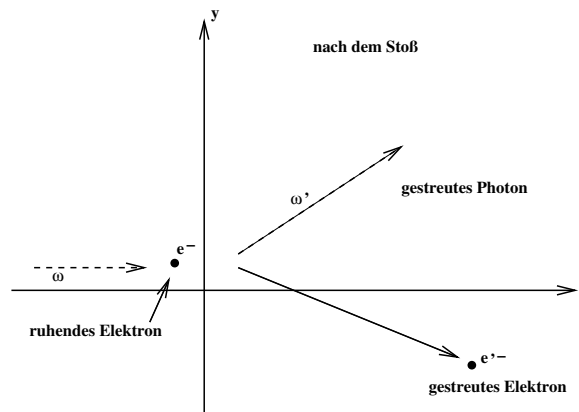


Abb. 1.6:

Wegen des Energie- und Impulserhaltungssatzes gilt:

$$E_\omega + E_e = E_{\omega'} + E_{e'} \tag{1.1}$$

$$\vec{P}_\omega + \vec{P}_e = \vec{P}_{\omega'} + \vec{P}_{e'} \tag{1.2}$$

Natürlich muss hier die relativistische Energie-Impuls-Beziehung genutzt werden: $E = c \cdot \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_\omega &= \hbar\omega = c|\vec{P}_\omega| \\
E_{\omega'} &= \hbar\omega' = c|\vec{P}_{\omega'}| \\
E_e &= m_e c^2; \vec{P}_e = 0 \\
E_{e'} &= c \cdot \sqrt{m_e^2 c^2 + \vec{P}_{e'}^2}
\end{aligned}$$

Wir setzen diese Beziehung nun in die Gleichung (1.1) und (1.2) ein:

$$(1.1) \quad \hbar\omega + m_e c^2 = \hbar\omega' + E_{e'}$$

$$(1.2) \quad \frac{\hbar\omega}{c} \cdot \vec{e}_\omega = \frac{\hbar\omega'}{c} \vec{e}_{\omega'} + \vec{P}_{e'}$$

$$\vec{e}_\omega = \frac{\vec{P}_\omega}{|\vec{P}_\omega|}; \quad \vec{e}_{\omega'} = \frac{\vec{P}_{\omega'}}{|\vec{P}_{\omega'}|}$$

$$\Rightarrow (1.1) \quad \left(\frac{\hbar\omega}{c} - \frac{\hbar\omega'}{c} + m_e c \right)^2 = \frac{E_{e'}^2}{c^2}$$

$$(1.2) \quad \left(\frac{\hbar\omega}{c} \vec{e}_\omega - \frac{\hbar\omega'}{c} \vec{e}_{\omega'} \right)^2 = \vec{P}_{e'}^2$$

$$\Rightarrow (1.1) \quad \frac{\hbar^2}{c^2} (\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega') + 2\hbar(\omega - \omega')m_e + m_e^2 c^2 = \frac{E_{e'}^2}{c^2}$$

$$(1.2) \quad \frac{\hbar^2}{c^2} (\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos \Theta) = \vec{P}_{e'}^2$$

Wir subtrahieren nun die erste Gleichung von der zweiten und berücksichtigen dabei die Beziehung

$$\vec{p}_{e'}^2 - \frac{E_{e'}^2}{c^2} = -m_e^2 c^2$$

die unmittelbar aus der relativistischen Energie-Impulsbeziehung folgt.

$$\Rightarrow \frac{2\hbar^2 \omega \omega'}{c^2} (1 - \cos \Theta) - 2\hbar(\omega - \omega')m_e - m_e^2 c^2 = -m_e^2 c^2$$

$$\Rightarrow \frac{\omega - \omega'}{\omega \omega'} = \frac{\hbar}{m_e c^2} (1 - \cos \Theta)$$

Aus der Beziehung $\frac{2\pi c}{\omega} = \lambda$ folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega - \omega'}{\omega \omega'} \cdot 2\pi c &= \frac{2\pi c}{\omega'} - \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda' - \lambda = \Delta\lambda \\
\Rightarrow \Delta\lambda &= \lambda' - \lambda = 2\pi \frac{\hbar}{m_e c} (1 - \cos \Theta)
\end{aligned}$$

Aus der trigonometrischen Formel $(1 - \cos \Theta) = 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ folgt:

$$\Delta\lambda = 4\pi \frac{\hbar}{m_e c} \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

Das entspricht genau der experimentell gefundenen Formel. Die Größe $\frac{\hbar}{m_e c}$ nennt man die reduzierte Compton-Wellenlänge des Elektrons. Ihr numerischer Wert ist:

$$\frac{\hbar}{m_e c} = \lambda = 0,3861 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$$

Wir sind also auch hier gezwungen, die Röntgenstrahlen als einen Teilchenstrom aufzufassen. Wenn die Röntgenstrahlen aber wirklich aus Teilchen bestehen, wieso können wir dann mit Hilfe unseres Gitters, das in diesem Experiment als Spektrometer diente, irgendwelche Beugungserscheinungen feststellen? Das wäre doch unmöglich bei einem reinen Teilchenstrom. Also handelt es sich doch bloß um Wellen? Nun, auch wenn wir das annehmen, befinden wir uns mit dem Experiment im Widerspruch, wie wir ja oben gesehen haben. Wir können uns die Röntgenstrahlen vorstellen wie wir wollen, als Teilchenstrom oder als elektromagnetische Welle, wir werden uns immer mit dem Experiment im Widerspruch befinden. Einmal verhalten sie sich wie ein Teilchenstrom - bei der Interaktion mit den Elektronen - und einmal als elektromagnetische Welle - bei der Beugung am Gitter.

1.3 Materie als Welle

So wie die oben besprochenen Versuche klar dem elektromagnetischen Wellenbild des Lichtes widersprechen, so widerspricht das 1927 von Davison und Germer unternommene Experiment zur Beugung von Elektronen am Kristall dem Teilchenbild des Elektrons (Abbildung 1.7).

Das Interferenzmuster ist das gleiche wie bei der Streuung von Röntgenstrahlen am Kristall (Laue-Diagramm). Die Wellenlänge lässt sich aus dem Interferenzbild ausmessen. Zwischen dieser Wellenlänge und dem Impuls der Elektronen gilt die Beziehung:

$$\lambda = \frac{h}{|p|}$$

Man nennt λ die reduzierte De Broglie-Wellenlänge.

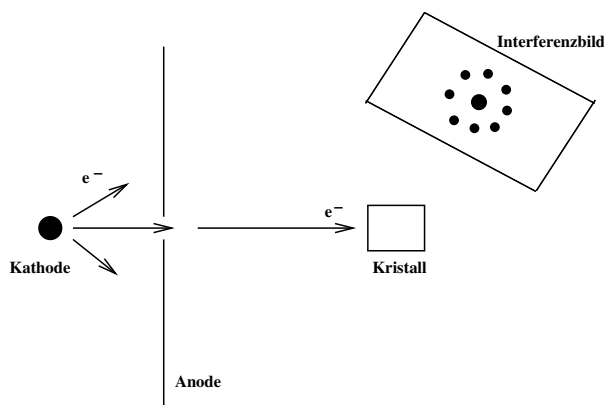


Abb. 1.7: Experiment von Davison und Germer zur Beugung von Elektronen am Kristall

Viele andere Experimente beweisen dagegen eindeutig die Teilcheneigenschaften der Elektronen (z.B. Stoßprozesse). Wie aber kann ein Elektron gleichzeitig ein Teilchen und eine Welle sein? In der klassischen Physik sind Teilchen und Welle doch streng disjunkte Modelle. Einem Teilchen wird z.B. eine Bahn zugeordnet, eine Welle ist dagegen irgendwie räumlich ausgedehnt; ein Teilchen ist unteilbar, eine Welle kann dagegen auseinanderfließen. In dispergierenden Medien z.B. dringt das Teilchen entweder ganz in das dichtere Medium ein oder wird ganz an der Grenzfläche reflektiert. Eine Welle dagegen kann teilweise eindringen und teilweise reflektiert werden. Es hat viele Versuche gegeben, dieses Dilemma mit Hilfe von neuen anschaulichen Modellen aufzulösen. Der deutsche Physiker Bopp machte folgenden Vorschlag: Die Elektronen, nach wie vor als Teilchen gedacht, sind in einem Führungsfeld eingebaut und schwimmen darin ähnlich wie kleine Korke auf einer Wasserwelle. Die Führungsfelder, die selbst nicht messbar sind, interferieren nun miteinander wie gewöhnliche Wellen. Bopp entwickelte auf der Grundlage dieses anschaulichen Modells eine Theorie, die die Beugungserscheinungen erklärt. Wie könnte man nun nachprüfen, ob dieses Modell richtig oder falsch ist? Wir wollen zu diesem Zweck einmal einen analogen Fall aus der Optik betrachten. In der Optik ist der Begriff der Kohärenzlänge definiert als der Gangunterschied der einzelnen Wellenzüge, bei dem gerade noch Interferenzerscheinungen sichtbar sind, d.h. wenn der Gangunterschied der einzelnen Wellenzüge größer ist als die Länge der Wellenzüge selbst, dann ist keine Interferenz zu sehen.

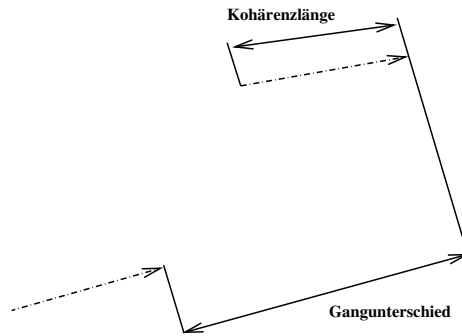


Abb. 1.8: Skizze zur Definition der Kohärenzlänge

Wenn das Modell von Bopp also richtig ist, dann muss bei hinreichend großem Abstand zwischen den einzelnen Elektronen das Interferenzbild verschwinden. Mit diesen Gedanken im Kopf unternahm der ungarische Physiker Janossi 1938 in Budapest das unten skizzierte Doppelspalt-Experiment.

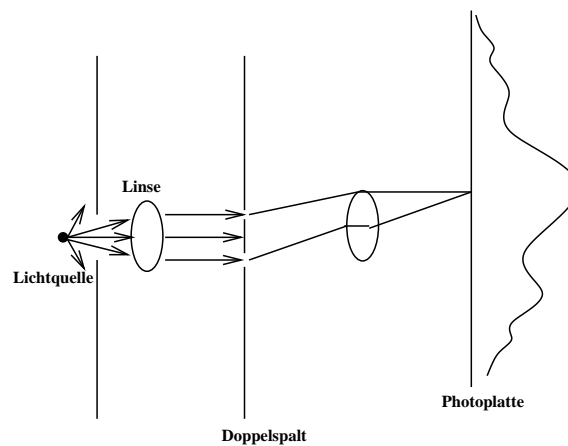


Abb. 1.9: Doppelspaltexperiment von Janossi

Janossi verringerte die Intensität des Lichtes so stark, bis zwischen dem Aufprall der einzelnen Photonen auf der Photoplatte eine Zeit T verging, so dass $T \cdot C = 20 \text{ km}$ ergab, wobei C die Geschwindigkeit der Photonen bedeutet. Das bedeutet, die Führungsfelder der einzelnen Photonen hatten einen Gangunterschied von 20 km. Dennoch war nach einiger Zeit ein deutliches Interferenzbild auf der Photoplatte zu sehen. Natürlich wäre es nicht sinnvoll, dem Führungsfeld eine Kohärenzlänge von 20 km zuzuordnen. Unter der Voraussetzung, dass die Kohärenzlänge des Führungsfeldes kleiner als 20 km ist, ist das Experiment von Janossi durch das Führungsfeld nicht zu erklären. Es bleibt nur übrig anzunehmen, dass ein Photon gleichzeitig durch beide Spalte gehen kann. Nur so können Photonen ohne miteinander zu interferieren die Interferenzfigur des Doppelspaltens erzeugen. 1958 wurde der gleiche Versuch mit Elektronen von Jönsson in Tübingen gemacht. Um die Interferenz zu erklären, musste man annehmen, dass ein Elektron gleichzeitig durch beide Spalten gehen kann.

Ähnlich ging es allen anderen Versuchen, das Teilchenbild und das Wellenbild des Elektrons oder Photons in irgendeiner Weise im klassischen Sinne in Einklang zu bringen. Es blieb der Quantenmechanik, eine durch radikale Änderungen der Grundlagen gekennzeichneten Theorie, vorbehalten, diese beiden Begriffe auf einer abstrakteren Ebene zu vereinigen.

Die Position der Quantenmechanik zu klassischen Mechanik wird durch folgende Figur gekennzeichnet:

Auf der Abszissenachse ist die reduzierte Compton-Wellenlänge dividiert durch den Radius des betrachteten Objektes aufgetragen. $\frac{m}{m_0}$ bedeutet die Masse des betrachteten Objektes geteilt durch seine Ruhemasse.

In diesem Semester werden wir uns nur mit der nicht-relativistischen Quantenmechanik (Q.M.) beschäftigen

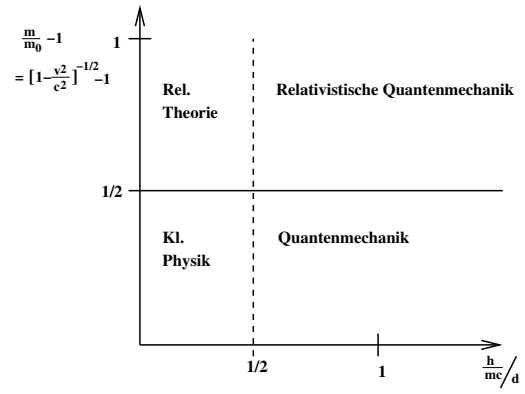


Abb. 1.10:

und erst im nächsten Semester zur relativistischen Quantenmechanik (Rel.Q.M.) übergehen.