1.3 Die Lagrange Bewegungsgleichungen

Auch in diesem Abschnitt behandeln wir wieder das System bestehend aus N Massenpunkten, deren Bewegungen durch k Zwangsbedingungen eingeschränkt sein sollen. Hier interessieren wir uns aber nicht für die eventuell auftretenden Zwangskräfte sondern wollen lediglich die zeitliche Entwicklung des Systems, also die Bewegung der Massenpunkte bestimmen. Dazu nehmen wir an, dass es uns gelungen ist einen Satz von $3N - k$ generalisierten Koordinaten zu bestimmen. Mit diesen generalisierten Koordinaten $q_1 \ldots q_{3N-k}$ können wir dann alle Konfigurationen des Systems, also alle Positionen der Teilchen $\vec{r}_i$, definieren, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind. Wir müssen dazu nur angeben wie sich die Ortsvektoren der einezlnen Teilchen als Funktion der generalisierten Koordinaten bestimmen lassen

$$\vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{3N-k}, t)\,. \tag{1.34}$$

Wir lassen dabei den Fall zu, dass die Zwangsbedingungen rheonom also zeitabhängig sind, was natürlich dazu führt, dass auch der Zusammenhang, wie man die Ortsvektoren $\vec{r}_i$ bei vorgegebenen Werten für die generalisierten Koordinaten auszurechen hat, von der Zeit abhängt. Dies wird dadurch dargestellt, dass die Funktion $\vec{r}_i$ in (1.34) explizit von der Zeit abhängt. Ausserdem werden sich natürlich bei einer Bewegung des Systems die Werte der generalisierten Koordinaten q_j mit der Zeit ändern, so dass die totale Ableitung eines Ortsvektors $\vec{r}_i$ nach der Zeit, das ist ja gerade die Geschwindigkeit $\vec{v}_i$ des Teilchens i berechnet wird mit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i &= \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3n-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^{3n-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Die virtuellen Verrückungen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind, lassen sich dann darstellen in der Form

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3n-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\,. \tag{1.36}$$

Dabei bezeichnen die δq_j beliebige infinitesimale Änderungen der generalisierten Koordinaten q_j, da ja nach der Definition der generalisierten Koordinaten, diese keinen Beschränkungen unterliegen.

Wir multiplizieren nun die Bewegungsgleichungen der einzelnen Teilchen i (siehe (**??**)) mit dem zugehörigen Element der virtuellen Verrückung und addieren diese Gleichungen über alle Teilchen i des Systems. Dies liefert uns:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{Zwang}} \delta\vec{r}_i\,. \tag{1.37}$$

Wegen des D'Alembertschen Prinzips (**??**) verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite dieser Gleichung und wir können mit Hilfe von (1.36) diese Gleichung umschreiben in

$$\sum_{i,j} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad = \quad \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \, . \tag{1.38}$$

Die zweite Gleichung kann man leicht durch Zurckrechnen unter Anwendung der Produktregel für die Zeitableitung verifizieren. Da auch der Vektor $\partial \vec{r}_i / \partial q_j$ von den generaliserten Koordinaten q_k und explizit von der Zeit abhängen kann, ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j}\left\{ \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j}\dot{\vec{r}}_i \, . \end{aligned} \tag{1.39}$$

Bei dem Übergang zur letzten Zeile haben wir die erste Zeile von (1.35) benutzt. Aus der zweiten Zeile dieser Gleichung (1.35) liest man ab, dass gilt:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \, . \tag{1.40}$$

Setzt man die Ergebnisse von (1.39) und (1.40) in die Gleichung (1.38) ein, so ergibt sich unter Benutzung von $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j &= \sum_{i,j} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i,j} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) \right\} \delta q_j \, . \end{aligned} \tag{1.41}$$

Auch in diesem Fall verifiziert man den Übergang zur zweiten Zeile der Gleichung am einfachsten dadurch, dass man zurück rechnet. Die kinetische Energie des Systems ist ja gegeben durch

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \, .$$

Ausserdem wissen wir, dass die infinitesimalen Verschiebungen δq_j beliebig sein können. Also gilt die Geichung ins besondere auch wenn nur ein Element, δq_{j0} von null verschieden ist. Dies bedeutet, dass wir aus (1.41) folgern können:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j \, . \tag{1.42}$$

Dabei bezeichnen wir Q_j, also di e Kraft, die wirksam wird, wenn die generalisierte Koordinate q_j verändert wird als " **Generalisierte Kraft** ".

Zur weiteren Spezifizierung dieses Begriffes der generalisierten Kraft wollen wir zwei Fälle betrachten:

- Zunächst einmal den Fall eines konservativen Kraftfeldes, bei dem die Kraft auf ein Teilchen i durch den Gradienten eines Potenzials, bezogen auf die Koordinaten dieses Teilchens i berechnet wird, also:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \, .$$

In diesem Fall berechnet sich die generalisierte Kraft

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} . \tag{1.43}$$

Wenn man also das Potenzial für die mit den Zwangsbedingungen verträglichen Positionen der Teilchen als Funktion der generalisierten Koordinaten q_j darstellt, so ergibt sich die generalisierte Kraft aus der Ableitung des Potentzials nach der entsprechenden Koordinate q_j.

- Man kann dieses Konzept von Kräften, die durch Potenziale definiert sind aber auch noch erweitern auf bestimmte Kräfte, die von Geschwindigkeiten abhängen. In diesem Fall nehmen wir an, dass eine Potenzialfunktion V als Funktion der generalisierten Koordinaten q_j un der zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ gegeben ist. Die geschwindigkeitsabhängige Kraft sei dann definiert durch

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{1.44}$$

  Es ist klar, dass dieser Fall eine Verallgemeinerung des konservativen Kraftfeldes darstellt. Für den Fall, dass V nicht von $\dot{q}_j$ abhängt reduziert sich ja (1.44) auf den Fall (1.43). Wir werden aber am Ende dieses Abschnittes sehen, dass mit der Verallgemeinerung von (1.44) auf geschwindigkeitsabhängige Kräfte auch der wichtige Fall der Lorentz Kraft, also der Kraft eines Magnetfeldes auf eine bewegte Ladung, erfasst wird.

Setzt man nun die darstellung der generalisierten Kraft für den allgemeinen Fall von (1.44) in (1.42) ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} ,$$

oder auch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 . \tag{1.45}$$

Definieren wir also die **Lagrange Funktion** als Differenz aus kinetischer Energie des Systems T und der potenziellen Energie V:

$$L := T - V , \tag{1.46}$$

so können wir die Differenzialgleichungen (1.45) kompakt schreiben in der Form der

Lagrange Bewegungsgleichungen 2.Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \tag{1.47}$$

Diese Gleichung gilt für alle $3N - k$ generalisierten Koordinaten. Die Lösung dieser Gleichungen liefern zusammen mit den Anfangsbedingungen für die Bewegung des Systems ein Ergebnis für die Werte der generalisierten Koordinaten $q_j(t)$ als Funktion der Zeit. Da wir über (1.34) aus den aktuellen Werten für die generalisierten Koordinaten die Ortsvektoren für die einzelnen Teilchen $\vec{r}_i$ berechnen können, ist damit das Problem, die zeitliche Entwicklung des Systems zu beschreiben gelöst.

Wir fassen also noch einmal die Schritte zur Beschreibung des Systems mit Hilfe der Lagrange Bewegungsgleichungen zusammen:

- Bestimme für das System aus N Teilchen mit k holonomen Zwangsbedingungen einen Satz von $3N - k$ generalisierten Koordinaten.
- Berechne die kinetische Energie T und das Potenzial V als funktion dieser generalisierten Koordinaten q_j und der zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$. Dabei entspricht im Fall von konservativen Kräften das Potenzial V der potenziellen Energie des Systems. Bei geschwindigkeitsabhängigen Kräften, hängt auch V von den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ ab und die generalisierten Kräfte ergeben sich aus V entsprechend der Gleichung (1.44).
- Aus der Differenz $T - V = L$ erhält man die Lagrange Funktion und kann die Lagrange Bewegungsgleichung zweiter Art (1.47) aufstellen.
- Die Lösung dieser Bewegungsgleichungen liefern zusammen mit Anfangsbedingungen $(q_i(t = 0), \dot{q}_i(t = 0))$ die Werte für die generalisierten Koordinaten für alle Zeiten.
- Über (1.34) sind damit auch die Positionen der Teilchen des Systems bestimmt.

Wir haben in diesem Abschnitt die Lagrange Bewegungsgleichungen zweiter Art aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen unter Benutzung des D'Alembertschen Prinzips hergeleitet. Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass man andererseits auch aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen die Newtonschen Bewegungsgleichungen herleiten kann. Als einfaches Beispiel betrachten wir dazu ein einzelnes Teilchen der Masse m, das sich ohne Zwangsbedingungen in einem konservativen Kraftfeld, das durch ein Potenzial V definiert ist, bewegt. Da keine Zwangsbedingungen vorliegen können wir die kartesischen Koordinaten des Teilchens als generalisierte Koordinaten benutzen. Das bedeutet

$$q_i = x_i = \{x, y, z\} \quad \text{für} \quad i = \{1, 2, 3\} \,.$$

Die kinetische Energie ist dann gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i{}^2$$

und

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i{}^2 - V(x_i) \,.$$

Daraus ergibt sich für

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \,,$$

und
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i\,. \tag{1.48}$$
Andererseits gilt
$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\,. \tag{1.49}$$
Bringt man diese Ergebnisse von (1.48) und (1.49) in die Lagrangsche Bewegungsgleichung (1.47) so ergibt sich
$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\,,$$
beziehungsweise in Vektorschreibweise
$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V\,,$$
also gerade die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen im konservativen Kraftfeld.

Als zweite Anmerkung wollen wir zeigen, dass die Definition einer geschwindigkeitsabhängigen Kraft nach (1.44) insbesondere die Wirkung eines elektromagnetischen Feldes auf ein geladenes Teilchen umfasst. Wir betrachten dazu die Bewegung eines Teilchens mit der Ladung e in einem elektromagnetischen Feld, das durch die Potenziale $\Phi(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ definiert ist. Aus diesen Potenzialen berechnen sich die elektrischen und magnetischen Felder durch die Beziehungen
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\,. \tag{1.50}$$
Das geladene Teilchen bewege sich ohne weitere Zwangsbedingungen, so dass wir wieder die kartesischen Koordinaten als generalisierte Koordinaten des Systems heranziehen können. Wir betrachten die Potenzialfunktion
$$V(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = e\Phi(\vec{r}) - e\vec{A}(\vec{r})\cdot\dot{\vec{r}}, \tag{1.51}$$
die offensichtlich von den generalisierten Koordinaten (x,y,z) und den zugehörigen Geschwindigkeiten abhängt. Mit der allgemeinen Beziehung (1.44) können wir nun die generalisierte Kraft Q_i in Richtung der Koordinate $q_i = x$ berechnen zu
$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \\ &= -e\frac{\partial \Phi}{\partial x} + e\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - e\frac{d}{dt}A_x \end{aligned} \tag{1.52}$$
Es soll nun gezeigt werden, dass die beiden letzten Terme in dieser Gleichung gilt
$$e\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - e\frac{d}{dt}A_x\,,$$
mit der x-Komponente von
$$e\left(\dot{\vec{r}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right) = e\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{B}\right)\,,$$

identifiziert werden kann. Dazu schreiben wir diese x-Komponente explizit aus

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)_x &= \dot{y}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z - \dot{z}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y \\
&= \dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\
&= \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} \\
&= \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \frac{d}{dt}A_x
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. Damit können wir also (1.52) umschreiben in

$$\begin{aligned}
F_x &= -e\left(\vec{\nabla}\Phi\right)_x + e\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)_x \\
&= eE_x + e\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)_x . \qquad (1.53)
\end{aligned}$$

Die generalisierte Kraft F_x für das geschwindigkeitsabhängige Potenzial aus (1.51) ist also gerade die x-Komponente der Coulombkraft plus der Lorentzkraft auf die bewegte Ladung e. Natürlich verläuft der Nachweis für die anderen kartesischen Komponeneten F_y und F_z entspechend.