

1.6 Hamiltonsches Prinzip

Wir kehren wieder zurück zu der Beschreibung von mechanischen Systemen, die, unter Berücksichtigung von möglichen Zwangsbedingungen, durch $n = 3N - k$ generalisierte Koordinaten q_i beschrieben werden. Dabei bezeichnet n die Zahl der Freiheitsgrade. Für den Fall $n = 2$ wird die zeitliche Entwicklung des Systems durch die Werte der Funktionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ als Funktion der Zeit beschrieben. Diese zeitliche Entwicklung wird durch eine Bahnkurve im zweidimensionalen Raum R^2 , also einer Trajektorie in der Ebene, die durch die Koordinaten q_1 und q_2 aufgespannt ist, beschrieben.

Das Hamiltonsche Prinzip besagt: Das System bewegt sich von einem Startpunkt zum Zeitpunkt t_1 zum Endpunkt zur Zeit t_2 auf der Trajektorie für die die Wirkung S , definiert durch

$$S := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t), \quad (1.102)$$

ein Extremum ist. Dabei sind die Start- und Endpunkte $q_i(t_1), q_i(t_2)$ vorgegeben.

Anders ausgedrückt gilt nach dem Hamiltonschen Prinzip für die realisierte Trajektorie das Variationsprinzip

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} dt L \right) = 0, \quad (1.103)$$

für Variationen des Weges $\delta q_i(t)$, bei denen der Start- und der Zielpunkt festgehalten sind. Da die Variationen des Weges durch die Variationen der generalisierten Koordinaten beschrieben werden, erfüllen die zur Variation zugelassenen Wege natürlich auch die Zwangsbedingungen des Systems.

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass das Hamiltonsche Prinzip für eine konservative Kraft oder aber auch für eine geschwindigkeitsabhängig Kraft direkt aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen plus dem D'Alembertschen Prinzip folgt (siehe (a) in 1.1). Mit dem im vorhergehenden Abschnitt geleisteten Vorarbeiten ist es dann sehr einfach zu sehen, dass das Hamiltonsche Prinzip auf die Bewegungsgleichungen II. Art des Lagrange Formalismus führt ((b) in 1.1). Darüber hinaus haben wir natürlich bereits im Abschnitt 1.3 gezeigt, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen mit dem D'Alembertschen Prinzip auch direkt auf die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen führen. Andererseits haben wir in dem Abschnitt natürlich auch gezeigt, dass aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für ein freies Teilchen im konservativen Kraftfeld die Newtonsche Bewegungsgleichung hergeleitet werden kann.

Bevor uns dem Beweis zuwenden, dass aus dem Newtonschen Bewegungsgleichungen das Hamiltonsche Prinzip folgt, sei auf wichtige Unterschiede in diesen Formulierungen hingewiesen:

- Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind Differenzialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit. Dies bedeutet, dass sie eine Aussage enthalten über die Bewegung zu jeweils einem bestimmten Zeitpunkt. Relevant in diesen Gleichungen sind nur die generalisierten Koordinaten des Systems und ihre Ableitungen nach der Zeit zu jeweils einem Zeitpunkt. Das Hamiltonsche Prinzip hingegen ist eine Aussage über

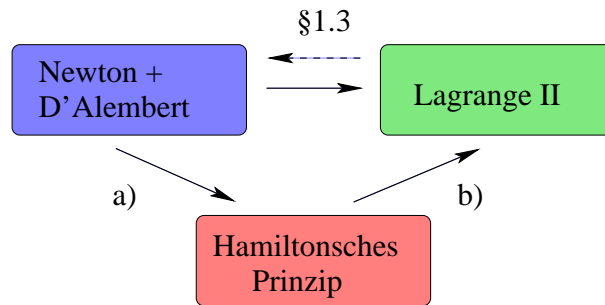


Abbildung 1.1: *Bewiesene Zusammenhänge zwischen verschiedenen Formulierungen der Mechanik*

das Wirkungsintegral, also über den gesamten Weg, den das System zurücklegt von einer Startzeit t_1 bis zu Endzeit t_2 .

- Zur Bestimmung einer eindeutigen Lösung werden bei den Newtonschen Bewegungsgleichungen Randbedingungen in der Form angegeben, dass man für jeden Freiheitsgrad, d.h. für jede generalisierte Koordinate, den Wert dieser Koordinate und ihre Ableitung nach der Zeit zur Startzeit t_1 angibt, also 2 Randbedingungen pro Freiheitsgrad. Auch beim Hamiltonschen Prinzip werden pro Freiheitsgrad zwei Randbedingungen vorgegeben. In diesem Fall sind das aber jeweils der Wert der generalisierten Koordinate zur Startzeit und zur Zielzeit.

Multipliziert man die Newtonschen Bewegungsgleichungen für das Teilchen i , auf das die reale Kraft \vec{F}_i und die Kraft zur Einhaltung der Zwangsbedingung, \vec{F}_i^{Zwang} , mit dem entsprechenden Vektor einer virtuellen Verrückung $\delta\vec{r}_i$, und summiert über alle Teilchen, so ergibt sich

$$0 = \sum_i \left(\vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{Zwang}} - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \delta\vec{r}_i. \quad (1.104)$$

Wegen des D'Alembertschen Prinzips verschwindet der zweite Term in dieser Gleichung, der Beitrag der Zwangskräfte. Die resultierende Gleichung gilt für alle Zeiten der Bewegung und wir können sie deshalb integrieren zu

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \delta\vec{r}_i \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \right) \delta\vec{r}_i + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) \delta\vec{r}_i - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Gleichung haben wir die Kraft auf das Teilchen i , \vec{F}_i ersetzt durch die Definition einer konservativen oder geschwindigkeitsabhängigen Kraft aus einem Potenzial V . Den zweiten Term auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir nun partiell integrieren

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta\vec{r}_i = \underbrace{\sum_i \frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta\vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i. \quad (1.106)$$

Dabei verschwindet der erste Term auf der linken Seite, da wir uns auf virtuelle Verrückungen beschränken wollen, die am Start- und Zielpunkt verschwinden, also vorgegebene Randbedingungen für die Koordinaten zur Zeit t_1 und t_2 respektieren. Damit können wir die ersten beiden Terme auf der rechten Seite der zweiten Zeile von (1.105) zusammenfassen zu

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \right) \delta \vec{r}_i - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta \dot{\vec{r}}_i = -\delta \int_{t_1}^{t_2} dt V. \quad (1.107)$$

Dies bezeichnet die Variation des Potentials V integriert über einen Weg, der wie die virtuellen Verrückungen sowohl die Zwangsbedingungen als auch die Randbedingungen zu den Zeiten t_1 und t_2 respektiert.

Wir betrachten nun den dritten Term auf der rechten Seite der zweiten Zeile von Gleichung (1.105) und formen diesen ebenfalls um mit Hilfe der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i &= \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \dot{\vec{r}}_i \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \left(\frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \delta \dot{\vec{r}}_i \\ &= -\delta \int_{t_1}^{t_2} dt T, \end{aligned} \quad (1.108)$$

wobei der Term in der letzten Zeile die Variation des Integrals der kinetischen Energie T bezeichnet, integriert über einen Weg mit den gleichen Bedingungen wie in (1.107). Die Ergebnisse von (1.107) und (1.108) eingesetzt in (1.106) liefern das Hamiltonsche Prinzip

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (T - V) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

was ja zu beweisen war.

Der Nachweis, dass aus dem Hamiltonschen Prinzip die Lagrangeschen Bewegungsgleichung der zweiten Art folgen (Schritt b in Abb. 1.1) ist nach den geleisteten Vorarbeiten sehr einfach. Wir müssen dazu nur verifizieren, dass das Hamiltonsche Prinzip (1.103) den Forderungen des Euler-Lagrangeschen Variationsprinzips von (??) entspricht wenn wir identifizieren

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i(x) &\rightarrow q_i(t) \\ y'_i &\rightarrow \dot{q}_i \\ f(y_i, y'_i, t) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t). \end{aligned}$$

Die entsprechende Umschreibung der Euler-Lagrangeschen Variationsgleichung (??) liefert dann die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$