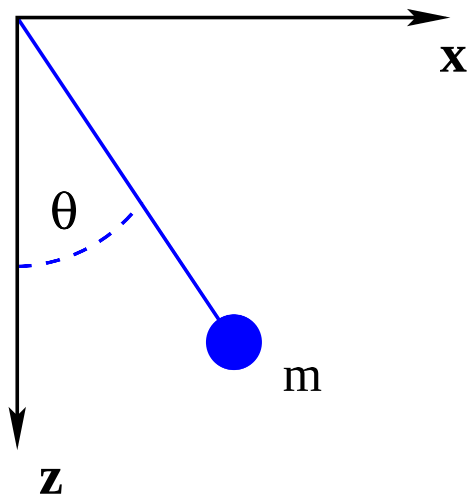

Abbildung 1.1: *Sphärisches Pendel*

1.4 Anwendungsbeispiele zum Lagrange Formalismus

1.4.1 Sphärisches Pendel

Als ein erstes Beipiel betrachten wir die Bewegung eines sphärischen Pendels im Schwerefeld der Erde. Dabei handelt es sich um eine Stange der Länge l, deren Masse wir vernachlässigen können und eine Punktmasse der Masse m. Das eine Ende der Stange ist im Koordinatenursprung befestigt, am anderen Ende befindet sich die Masse m. Die Stange sorgt also dafür, dass sich der Massenpunkt auf einer Kugelschale mit dem Radius l um den Koordinatenursprung bewegen kann (siehe auch Abb 1.1).

Es liegt also nahe, den Ortsvektor des Massenpunktes durch Kugelkoordinaten (r, θ, φ) zu beschreiben. Die Zwangsbedingung, die durch die Stange realisiert wird, legt dann die Koordinate $r = l$ fest, während die Winkelkoordinaten als freie generalisierte Koordinaten des Systems betrachtet werden können. Um den Lagrange Formalismus anwenden zu können müssen wir zunächst einmal die kinetische Energie des Systems als Funktion der generalisierten Koordinaten (θ, φ) und der zugehörigen Geschwindigkeiten $(\dot\theta, \dot\varphi)$ berechnen. Dazu benötigen wir die Darstellung der Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} l\sin\theta\cos\varphi \\ l\sin\theta\sin\varphi \\ l\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= l\dot\theta\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + l\dot\varphi\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= l\dot\theta\hat{e}_\theta + l\sin\theta\dot\varphi\hat{e}_\varphi\,. \qquad (1.54)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $\hat{e}_\theta$ und $\hat{e}_\varphi$ die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten. Da diese Vektoren orthonormal sind, ergibt sich für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \varphi^2 \sin^2 \theta \right) . \tag{1.55}$$

Wir sehen also, dass die kinetische Energie sowohl von den Geschwindigkeiten $\dot{\theta}$ und $\dot{\varphi}$ abhängt aber darüber hinaus auch von der generalisierten Koordinate θ.

Auf die Masse des sphärischen Pendels m soll die Schwerkraft wirken und das Koordinatensystem sei so ausgerichtet, dass diese Schwerkraft parallel zu z-Achse wirkt. Dies bedeutet, dass wir das zugehörige Potenzial mit der Konstanten g für die Erdbeschleunigung schreiben können

$$V = -mg\, z = -mg\, l \, \cos \theta \, .$$

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L = T - V = \frac{ml^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + mg\, l \, \cos \theta \, . \tag{1.56}$$

Wir betrachten zunächst die Lagrangesche Bewegungsgleichung für die generalisierte Koordinate φ und berechnen dazu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt} m l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad = \quad 0 \, . \end{aligned} \tag{1.57}$$

Da die Lagrangefunktion des sphärischen Pendels nicht von der generalisierten Koordinate φ abhängt, ist die zeitliche Ableitung von $\partial L / \partial \dot{\varphi}$ identisch 0, was bedeutet, diese Ableitung $\partial L / \partial \dot{\varphi}$ eine Konstante der Bewegung ist. Es gilt also:

$$m l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = C \, . \tag{1.58}$$

Bei vorgegebenen Anfangsbedingungen, also Werten für die generalisierten Koordinaten θ, φ und den zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ zur Startzeit $t = 0$ kann man die Konstante C bestimmen. Die Lagrangesche Bewegungsgleichung für die generalisierte Koordinate θ liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} m l^2 \dot{\theta} \\ &= m l^2 \ddot{\theta} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ &= m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta \, . \end{aligned} \tag{1.59}$$

Ersetzt man in dieser Gleichung φ entsprechend (1.58) so ergibt sich daraus die Differenzialgleichung für die generalisierte Koordinate

$$l^2 \ddot{\theta} - \frac{C^2 \cos \theta}{m^2 l^4 \sin^3 \theta} + gl \sin \theta = 0 \, .$$

Diese einfache Differenzialleichung zweiter Ordnung kann nun z.B. numerisch gelöst werden und man erhält für die vorgegebene Anfangsbedingungen das Ergebnis $\theta(t)$. Durch Benutzen von (1.58) ergibt sich daraus die Geschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$, was uns schliesslich auch die Funktion $\varphi(t)$ liefert. Die genarlisierten Koordinaten sind damit für alle Zeiten t bestimmt, was natürlich auch bedeutet, dass der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Pendelmasse berechnet werden kann.

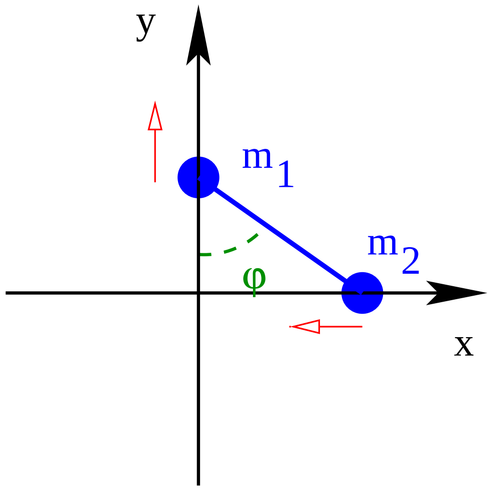

Abbildung 1.2: *Gekoppelte Massenpunkte*

1.4.2 Gekoppelte Massenpunkte

Als zweites Beispiel betrachten wir zwei gekoppelte Massenpunkte, so wie sie in Abb. 1.2 skizziert sind. Der eine Massenpunkt mit der Masse m_1 soll sich nur entlang der a-Achse bewegen können, während die Bewegung von m_2 auf die x-Achse beschränkt ist. Ausserdem sind die beiden Massenpunkte über eine masselose Stange verbunden, die dafür sorgt, dass der Abstand der beiden Massen stets einen festen a behält. Für die Koordinaten der beiden Massenpunkte gibt es also insgesamt 5 holonome Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0\,, & x_1 &= 0\,, \\ z_2 &= 0\,, & y_2 &= 0\,, \\ & & (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Damit hat das System nur einen einzigen Freiheitsgrad und wir können diesen durch die Wahl des Winkel φ (siehe Abb. 1.2) als generalisierte Koordinate parameterisieren. Mit dieser Wahl sind nämlich die Ortsvektoren der Massenpunkte durch

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} a\sin\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.60}$$

definiert. Daraus ergeben sich die Geschwindigkeiten

$$\dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\dot\varphi\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} a\dot\varphi\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.61}$$

Damit können wir direkt die kinetische Energies des Systems berechnen zu

$$T(\varphi,\dot\varphi) = \frac{m_1 a^2}{2}\dot\varphi^2\sin^2\varphi + \frac{m_2 a^2}{2}\dot\varphi^2\cos^2\varphi\,. \tag{1.62}$$

Nehmen wir ausserdem an, dass sich die beiden Massenpunkte im Schwerefeld der Erde bewegen mit einem Potenzial

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g a \cos\varphi\,, \tag{1.63}$$

so können wir mit (1.62) und (1.63) direkt die Lagrange Funktion $L = T - V$ als Funktion von φ und $\dot\varphi$ schreiben und die Lagrangesche Bewegungsgleichung aufstellen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} &= \frac{d}{dt}a^2\dot\varphi\left(m_1\sin^2\varphi + m_2\cos^2\varphi\right) \\ &= a^2\ddot\varphi\left(m_1\sin^2\varphi + m_2\cos^2\varphi\right) + 2a^2\dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi\,(m_1 - m_2) \\ = \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= a^2\dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi\,(m_1 - m_2) + m_1 g a\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Für den Fall identischer Massen, $m_1 = m_2$ vereinfacht sich diese Gleichung auf

$$\ddot\varphi = \frac{g}{a}\sin\varphi\,.$$

1.4.3 Starrer Körper

Als drittes Anwendungsbeispiel betrachten wir die Bewegungsgleichung eines Starren Körpers, den wir ja schon im ersten Teil, der Vorlesung *Physik I*, behandelt haben. Es sei daran erinnert, dass ein starrer Körper sechs Freiheitsgrade besitzt. Wir können seine Bewegung durch sechs generalisierte Koordinaten beschreiben. Zur Definition dieser generalisierten Koordinaten legen wir einen Punkt des Körpers, P_0 fest (dies kann z.B. der Schwerpunkt des Körpers sein, muss es aber nicht) und benutzen den Ortsvektor $\vec R_0$, beziehungsweise die kartesichen Koordinaten dieses Punktes (X_0, Y_0, Z_0) um die Position des Körpers zu beschreiben. Dadurch sind also bereits 3 generalisierte Koordinaten festgelegt.

Die weiteren 3 Koordinaten werden benötigt um die Orientierung des starren Körpers zu beschreiben. Dazu legen wir ein körperfestes Koordinatensystem fest, das seinen Koordinatenursprung im Punkt P_0 besitzt und für welches die Richtung der kartesischen Achsen durch 3 weitere Punkte des Körpers festgelegt sind. Zum Vergleich ziehen wir ein raumfestes Koordinatensystem heran, dessen Ursprung ebenfalls im Punkt P_0 fixiert ist, dessen Koordinatenachsen aber unabhängig vom Körper an raumfesten Orientierungspunkten festgemacht sind.

Die Orientierung des körperfesten Koordinatenssystems relativ zu dem raumfesten System in P_0 ist durch 3 Eulerwinkel eindeutig definiert. Diese 3 Eulerwinkel, ϕ, θ und ψ, definieren auch die Orientierung des Körpers im Raum und sollen als weitere generalisierte Koordinaten dienen.

Zur Anwendung des Lagrange Formalismus auf die Bewegung eines starren Körpers müssen wir in jedem Fall die kinetische Energie dieses starren Körpers als Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten berechnen. Dazu beginnen wir mit der Definition der kinetischen Energie als Summe über die kinetischen Energien aller Massenpunkt des Körpers mit Massen m_α und Ortsvektoren $\vec r_\alpha$

$$T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec r}_\alpha^{\,2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{\rho}}_\alpha\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\dot{\vec{R}}_0^2 \sum_\alpha m_\alpha \quad + \dot{\vec{R}}_0 \sum_\alpha \dot{\vec{\rho}}_\alpha \quad + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{\rho}}_\alpha^2
\end{aligned} \tag{1.64}
$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile dieser Gleichung wurde der Ortsvektor jedes Massenpunkte $\vec{r}_\alpha$ zerlegt in die Vektorsumme aus dem Ortsvektor des Punktes P_0, $\vec{R}_0$, und den Relativvektor $\vec{\rho}_\alpha$ des Massenpunktes α relativ zum Punkt P_0. Dadurch erhalten wir in der dritten Zeile die kinetische Energie als Summe von drei Summanden. Der erste Summand entsprichte der kinetischen Energie des Referenzpunktes P_0 mit einer Masse $M = \sum_\alpha m_\alpha$, die der Gesamtmasse des Körpers entspricht. Der zweite Term ist ein Mischterm, der sowohl die Geschwindigkeit des Referenzpunkte P_0 enthält als auch die Relativgeschwindigkeiten $\dot{\vec{\rho}}_\alpha$. Dieser Term verschwindet wenn

- Der Bezugspunkt P_0 gleich dem Schwerpunkt des Körpers ist. Denn der Vektor

$$
\sum_\alpha m_\alpha \vec{\rho}_\alpha \,, \tag{1.65}
$$

ist der Vektor, der auf den Schwerpunkt des Systems zeigt multipliziert mit der Masse M im Koordinatensystem mit dem Ursprung P_0. Ist aber P_0 selbst der Schwerpunkt, so ist dieser Vektor gleich dem Nullvektor. Dann ist aber die zeitliche Ableitung des Vektors (1.65) identisch Null. Da diese Ableitung von (1.65) in dem Mischterm auftritt, verschwindet dieser. Der Mischterm ist ausserdem Null

- wenn der Punkt P_0 sich nicht bewegt. In diesem Fall ist ja $\dot{\vec{R}}_0 = 0$ und es verschwinden sowohl der erste als auch der zweite Summand in der dritten Zeile von (1.64).

Wir nehmen also im Folgenden an, dass der Punkt P_0 festgehalten sei, so dass sich die Bewegung des Körpers auf eine Drehung reduziert, bei der die Drehachse durch den Punkt P_0 weist. Erfolgt diese Drehung mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, so berechnet sich

$$
\dot{\vec{\rho}}_\alpha = \omega \times \rho_\alpha \,,
$$

und die kinetische Energie ergibt sich als

$$
T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot (\mathcal{I}\vec{\omega}) \,. \tag{1.66}
$$

Dabei ist $\mathcal{I}$ der Trägheitstensor des starren Körpers bezogen auf den Referenzpunkt P_0. Dieser Trägheitstensor hat die besonders einfache Diagonalgestalt

$$
\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{1.67}
$$

wenn wir ihn in der Basis der Eigenvektoren darstellen. In diesem Fall ist ja

$$
T = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) \,, \tag{1.68}
$$

wobei die ω_i die Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ bezogen auf die Basis der Eigenvektoren von $\mathcal{I}$ sind. Diese Eigenvektoren bilden ein kartesisches Koordinatensystem, das fest mit dem Körper verbunden ist (ein körperfestes Koordinatensystem), mit dem Koordinatenursprung P_0. Es liegt also nahe, diese körperfeste Koordinatensystem auch als körperfestes Referenzsystem zur Charakterisierung der Orientierung des Körpers heranzuziehen.

Was also noch zu tun bleibt, ist die kinetische Energie in der Form von (1.68) umzurechnen auf die oben eingeführten generalisierten Koordinaten, ϕ, θ und ψ, und die zugehörigen Geschwindigkeiten. Dazu betrachten wir als erstes, wie sich eine Geschwindigkeit des dritten Eulerwinkels ψ, $\dot{\psi}$ in den Koordinaten des körperfesten Systems, ω_i darstellt. Der dritte Eulerwinkel ψ beschreibt ja gerade eine Drehung um die dritte Achse (z-Achse) des körperfesten Koordinatensystems. Es gilt also

$$\vec{\omega}(\dot{\psi}) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} . \tag{1.69}$$

Wie stellt sich nun eine Bewegung mit der Geschindigkeit $\dot{\theta}$ in der körperfesten Basis dar? Eine Bewegung mit der Geschindigkeit $\dot{\theta}$ entspricht einer Drehung um die x-Achse, des Koordinatensystems, das sich nach 2 Schritten der Eulertransformation vom raumfesten in das körperfeste Koordinatensystem ergibt. In diesem System ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit also gegeben durch die Komponenten $(\dot{\theta}, 0, 0)$ Um diesen Vektor in der körperfesten Basis der ω_i darzustellen müssen wir die dritte Transformation anwenden

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(\dot{\theta}) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{1.70}$$

Weiter benötigen wir noch die Darstellung einer Bewegung mit der Geschwindigkeit $\dot{\phi}$ in der körperfesten Basis der Eigenvektoren des Trägheitstensors. In der raumfesten Basis oder auch in der Basis nach der ersten Transformation mit dem Euler-Winkel ϕ entspricht eine Drehung um den Euler Winkel ϕ, einer Drehung um die z-Achse. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ wird also in diesem Koordinatensystem durch die Komponenten $(0, 0, \dot{\phi})$ dargestellt. Die Transformation auf das körperfeste Koordinatensystem der Eigenvektoren liefert

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(\dot{\phi}) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{1.71}$$

Zusammengenommen ergeben (1.69),(1.70) und (1.71) also eine allgemeine Winkelgeschwindigkeit in den Variablen $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ und $\dot{\phi}$ dargestellt im Koordinatensystem der Ei-

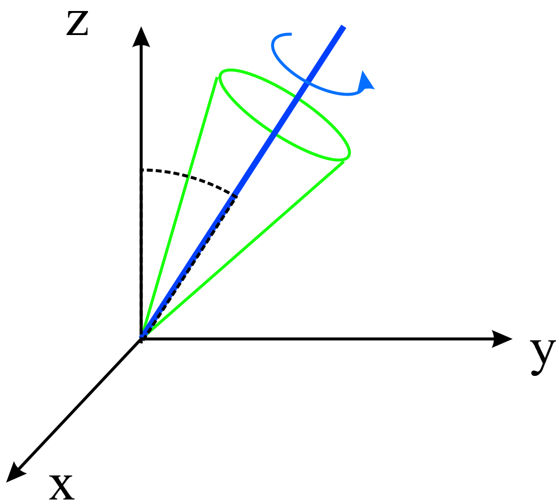

Abbildung 1.3: *Symmetrischer Kreisel*

genvektoren zum Trägheitstensor

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} . \tag{1.72}$$

Mit (1.68) erhalten wir also für die kinetische Energie der Rotationsbewegung eines starren Körpers

$$T = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \right)^2 + \frac{I_2}{2} \left(\dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \right)^2 + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \right)^2 . \tag{1.73}$$

Wir wollen den Fall eines rotierenden Kreisels betrachten, bei dem der starre Körper aus einem Kegel besteht, der, wie in Abb. 1.3 dargestellt, auf seiner Spitze, die im Koordinatenursprung fixiert sein soll, rotiert. Für den ruhende Referenzpunkt, P_0, wählen wir natürlich in diesem Fall diese Spitze des Kegels und es gilt deshalb den Trägheitstensor $\mathcal{I}$ bezogen auf diesen Referenzpunkt zu bestimmen.

Für einen solch symmetrischen Kreisel, der kreissymmetrisch um die Zentrumsachse ist, gilt, dass diese Symmetrieachse gleichzeitig eine Hauptträgheitsachse ist. Der zugehörige Eigenvektor des Trägheitstensors liegt also parallel zu dieser Hauptträgheitsachse. Wir bezeichnen das entsprechende Hauptträgheitsmoment mit I_3. Wegen dieser hohen Symmetrie des Kreisels (man spricht auch von einem symmetrischen Kreisel), gilt, dass die beiden anderen Hauptträgheitsmomente identisch sind

$$I_1 = I_2 \, , \tag{1.74}$$

und die zugehörigen Eigenvektoren beliebig senkrecht zur Symmetrieachse gewählt werden können. Wegen (1.74 vereinfacht sich der Ausdruck (1.73) zu

$$T = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\psi}^2 \right) . \tag{1.75}$$

Bsetrachten wir nun die potenzielle Energie dieses Kreisels, die die Wirkung der Erdanziehung (in Richtung von $.\hat{e}_z$) beschreiben soll. Diese Gravitationskraft wirkt als ob die Kraft auf die Gesamtmasse lokalisiert im Schwerpunkt des Kreisels wirken würde. Bezeichnen wir also den Abstand des Schwerpunktes des Kegels von der Spitze mit l und die Gesamtmasse mit M, so ist das Gravitationspotenzial gegeben durch

$$V = Mgl\cos\theta\,. \tag{1.76}$$

Wir sehen also aus den expliziten Ausdrücken für die kinetische und die potenzielle Energie in (1.75) bzw. (1.76), dass die Lagrangefunktion

$$L = T - V = L(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \theta)$$

zwar von allen drei generalisierten Geschwindigkeiten abhängt, aber nicht von den generalisierten Koordinaten ϕ und ψ. Man bezeichnet solche Koordinaten auch als **zyklische Koordinaten** (allgemeine Diskussion erfolgt später). Wegen der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen gilt für dies zyklischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \;= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\,, \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0 \;= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\,. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= I_1\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3\left(\dot{\phi}\cos^2\theta + \dot{\psi}\cos\theta\right) = c_\phi\,, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right) = I_3\omega_3 = c_\psi\,. \end{aligned} \tag{1.78}$$

sind also Konstanten der Bewegung. Aus der zweiten dieser beiden Gleichungen entnehmen wir, dass die Winkelgeschwindigkeit ω_3 also die Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels um die Symmetrieachse konstant bleibt. Ausserdem können wir natürlich diese zweite Gleichung nach $\dot{\psi}$ auflösen

$$\dot{\psi} = \frac{c_\psi - I_3\dot{\phi}\cos\theta}{I_3}\,,$$

dieses Ergebnis in die erste der beiden Gleichungen von (1.78) einsetzen und dies auflösen nach

$$\dot{\phi} = \frac{c_\phi - c_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\,. \tag{1.79}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist die Geschindigkeit mit der die Figurenachse um die raumfeste z-Achse präzediert. Auch diese Geschwindigkeit der Präzessionsbewegung bleibt also konstant, wenn der Winkel zwischen Symmetrieachse des Kreisels und der laborfesten z-Achse, θ konstant bleibt. Ändert sich allerdings θ so muss sich nach (1.79) auch $\dot{\phi}$ ändern.

Die Bewegungsgleichung für die Winkelkoordinate θ ist auch leicht zu aufzustellen, die Lösung dieser Gleichung ist jedoch nicht sehr transparent und deshalb soll hier darauf verzichtet werden.