2.5 Noether Theorem: Symmetrien und Konstanten

Den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Konstanten der Bewegung haben wir bereits im Abschnitt **??** angesprochen. Hier soll gezeigt werden, dass jeder Symmetrie des Systems eine Erhaltungsgröße zugeordnet werden kann. Zu jeder kanonischen Transformation, bei deren Anwendung sich die Hamilton Funktion nicht ändert, können wir eine dynamische Variable definieren, die bei der Entwicklung des Systems erhalten bleibt, also eine Konstante der Bewegung ist. Dieser Zusammenhang wurde als Theorem von Emmy Noether[1] formuliert. Dieses Noether Theorem wird häufig im Rahmen des Lagrange Formalismus formuliert (siehe z.B. Kapitel 15 in T. Fließbach: Mechanik). Hier werden wir es im Rahmen des Hamilton Formalismus behandeln. Es spielt eine besonders große Rolle in der Feldtheorie.

Zur Formulierung des Noether Theorems definieren wie eine **infinitesimale kanonische Transformation**

$$\begin{array}{ccc} p_i & \Longrightarrow & \alpha_i = p_i + \delta p_i \\ q_i & & \beta_i = q_i + \delta q_i \end{array} , \tag{2.93}$$

als eine kanonische Transformation, bei der die neuen Koordinaten und Impulse sich nur um infinitesimal kleine Korrekturen, δq_i und δp_i aus den ursprünglichen Koordinaten und Impulsen ergeben. Damit die Transformation kanonisch ist, muss es eine erzeugende Funktion geben, mit der diese Transformation beschrieben wird. Wir betrachten dazu eine erzeugende Funktionen vom Typ F_2 (siehe (**??**)) und machen den Ansatz

$$F_2(q_i, \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i + \varepsilon f(q_i, \alpha_i) \,. \tag{2.94}$$

Dabei ist $f(q_i, \alpha_i)$ eine beliebige Funktion der alten Koordinaten und neuen Impulsen und der Faktor ε soll infinitesimal klein sein, so dass die Beiträge dieses zweiten Terms εf zur erzeugenden Funktion F infinitesimal sind. Mit dieser erzeugenden Funktion und den Regeln (**??**) ergibt sich eine kanonische Transformation

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \alpha_i + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \beta_i &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \,. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Der Vergleich von (2.95) mit (2.93) zeigt, dass wir den Absatz (2.94) geschickt gewählt haben, denn die Änderungen der Koordinaten und Impulse ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \delta p_i &= -\varepsilon \frac{\partial f(q_i, \alpha_i)}{\partial q_i} \,, \\ \delta q_i &= \varepsilon \frac{\partial f(q_i, \alpha_i)}{\partial \alpha_i} \,. \end{aligned} \tag{2.96}$$

[1]Dieses Theorem ist nach der Mathematikerin und Physikerin Emmy Noether (1882-1935) benannt. Als Jüdin musste Emmy Noether 1933 ihren Lehrstuhl für Mathematik an der Uniuversität Göttingen verlassen. Sie flüchtete in die USA und lehrte am *Institute for Advanced Study* in Princeton und am *Bryn Mawr College*

Die Änderungen sind δp_i und δq_i sind also proportional zu ε und damit infinitesimal klein. Für die weitere Behandlung betrachten wir das Argument α_i in der Funktion f und entwickeln die Funktion f um den Punkt $\alpha_j = p_j$ im Sinne eine Taylor Entwicklung

$$f(\alpha_i, q_i) = f(p_i, q_i) + \sum_j \frac{\partial f(p,q)}{\partial p_j}\delta p_j + \dots$$

Diese Taylor Entwicklung kann nach dem zweiten Glied abgebrochen werden, da die δp_j infinitesimal sind und Terme, die quadratisch in infinitesimalen Größen sind, vernachlässigt werden sollen. Damit ergibt sich also für

$$\delta p_i = -\varepsilon\frac{\partial f(q_i,\alpha_i)}{\partial q_i} = -\varepsilon\frac{\partial f(q_i,p_i)}{\partial q_i} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_j \frac{\partial f(p,q)}{\partial p_j}\delta p_j + \dots$$

Auch hier werden wieder die Terme zweiter und höherer Ordnung in infinitesimalen Größen vernachlässigt und die Korrekturterme (2.96) ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \delta p_i &= -\varepsilon\tfrac{\partial f(q_i,p_i)}{\partial q_i} &= \varepsilon\left\{p_i, f\right\}\ , \\ \delta q_i &= \varepsilon\tfrac{\partial f(q_i,p_i)}{\partial p_i} &= \varepsilon\left\{q_i, f\right\}\ . \end{aligned} \tag{2.97}$$

Die zweite Gleichung in jeder dieser Zeilen ergibt sich dirket aus der Definition der Poisson Klammern (**??**). Die infinitesimalen Abweichungen der neuen Koordinaten und Impulse von den alten sind also ausschliesslich durch die Funktion f, beziehungsweise durch die entsprechenden Poisson Klammern von f mit seinen Argumenten definiert. Deshalb heisst f auch die **Erzeugende Funktion der infinitesimalen Transformation**.

Wir betrachten nun die Änderung einer dynamischen Variable g, wenn die Argumente dieser dynamischen Variablen infinitesimal verändert werden

$$\delta g := g(\alpha_i,\beta_i) - g(p_i,q_i)\,. \tag{2.98}$$

Ist f die erzeugende Funktion dieser infinitesimalen Transformation der Variablen $(p,q \to \alpha,\beta)$, so berechnet sich diese Änderung gemäß

$$\delta g = \varepsilon\left\{f, g\right\}\ . \tag{2.99}$$

Zum Beweis dieser Beziehung berechnen wir in einer Taylor Entwicklung

$$\begin{aligned} g(\alpha_i,\beta_i) &= g(p_i,q_i) + \sum_i\left[\frac{\partial g}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial g}{\partial p_i}\delta p_i\right] + \dots \\ &= g(p_i,q_i) + \sum_i\left[\frac{\partial g}{\partial q_i}\varepsilon\frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial p_i}\left(-\varepsilon\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\right] \\ &= g(p_i,q_i) + \left\{f, g\right\}\ . \end{aligned} \tag{2.100}$$

Die durch Punkte angedeuteten Terme in der ersten Reihe werden beim Übergang zur zweiten Zeile vernachlässigt, da sie quadratisch in den infinitesimalen Änderungen sind. Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurden die Beziehungen (2.97) eingesetzt. Die dritte Zeile und damit der Beweis von(2.99) ergibt sich aus der Definition der Poisson Klammer.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir das Noether Theorem formulieren

Sei f eine dynamische Variable, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Die Hamiltonfunktion des Systems H ist genau dann invariant unter der infinitesimalen Transformation, die durch f erzeugt wird (d.h. δH definiert gemäß (2.99) ist identisch null), wenn f eine Konstante der Bewegung ist.

Nach den geleisteten Vorarbeiten ist der Beweis dieses Theorems sehr einfach: Nach (2.99) ist H genau dann invariant unter der infinitesimalen Transformation, wenn die Poisson Klammer $\{f, H\} = 0$. Dies ist aber nach (**??**) gleichbedeutend damit, dass f eine Konstante der Bewegung ist. Ausgedrückt in Symbolen kann der Beweis also auf eine Zeile reduziert werden

$$\delta H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{f, H\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,. \tag{2.101}$$

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes sollen verschiedene Beispiele für die Anwendung dieses Theorems besprochen werden. Als erstes Beispiel wollen wir den Fall behandeln, dass die Hamilton Funktion von einer bestimmten Koordinate q_i nicht abhängt. Damit ändert sich der Wert der Hamilton Funktion nicht, wenn diese Koordinate um einen Wert ε modifiziert wird. Die Hamilton Funktion ist also invariant unter der Transformation

$$\begin{aligned} p_j &\Rightarrow \alpha_j = p_j + 0 \\ q_j &\Rightarrow \beta_j = q_j + \varepsilon\delta_{i,j}\,. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Wir können uns nun davon überzeugen, dass dieses Transformation durch die Funktion

$$f = p_i \tag{2.103}$$

erzeugt wird. Dazu verifizieren wir mit (2.97)

$$\begin{aligned} \delta p_j &= -\varepsilon \tfrac{\partial p_i}{\partial q_j} &= 0\,, \\ \delta q_j &= \varepsilon \tfrac{\partial p_i}{\partial p_j} &= \varepsilon \delta_{ij}\,. \end{aligned} \tag{2.104}$$

Nach dem Noether Theorem ist also die Tatsache, dass H invariant unter einer Änderung der Koordinate q_i ist, gleichbedeutend damit, dass der zugehörige kanonische Impuls eine Konstante der Bewegung ist. Natürlich ist dieses Ergebnis längst bekannt etwa durch die Bewegungsgleichung

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,,$$

aber mit diesem trivialen Beispiel sollten die Begriffe, die bei der Formulierung des Noether Theorems auftreten, verdeutlicht werden.

In einem zweiten Beispiel betrachten wir ein System aus vielen Teilchen ohne Zwangsbedingungen so dass die kartesichen Koordinaten, x_i, y_i, z_i, der einzelnen Teilchen i als generalisierte Koordinaten und die zugehörigen Komponenten des Newtonschen Impulses, p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}, als kanonische Impulse betrachtet werden können. Wir betrachten dann als ein Beisiel für die Erzeugende Funktion einer infinitesimalen kanonischen Transformation die Funktion

$$f_x = \sum_{i=1}^{N} p_{xi}\,, \tag{2.105}$$

das ist die x-Komponente des Gesamtimpulses des Systems. Nach (2.97) erzeugt diese Funktion f_x die folgende kanonische Transformation für die Impulskomponenten

$$\begin{aligned} \delta p_{xj} &= \varepsilon \left\{ p_{xj}, \sum_{i=1}^{N} p_{xi} \right\} \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \{p_{xj}, p_{xi}\} \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.106}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurden die Rechenregeln für die Poisson Klammern benutzt und bei dem Übergang zur dritten Zeile die Eigenschaften der Fundamentalklammern (**??**). Natürlich kann man ganz analog auch zeigen, dass die f_x aus (2.105) auch keine Transformation der anderen kartesischen Impulskomponenten p_{yj} und p_{zj} erzeugt. Andereseits ergibt sich für

$$\begin{aligned} \delta x_j &= \varepsilon \left\{ x_j, \sum_{i=1}^{N} p_{xi} \right\} \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \{x_j, p_{xi}\} \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \delta_{ji} \\ &= \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{2.107}$$

während die y_i und z_i durch f_x nicht modifiziert werden. Die Funktion f_x erzeugt also eine Transformation, bei der die x Koordinaten aller Teilchen um die gleiche Strecke ε verschoben werden, also eine Translation des Gesamtsystems in x-Richtung. Das Noether Theorem besagt also in dieser Anwendung: Ist die Hamiltonfunktion invariant unter einer solchen Translation in der x-Richtung, dann impliziert dies, dass die x-Komponente des Gesamtimpuls f_x eine Konstante der Bewegung ist.

Natürlich gilt dies analog auch für die y und z Komponente. Ist also eine Hamiltonfunktion invariant unter einer Translation in eine beliebige Raumrichtung, so ist der Gesamtimpuls des Systems eine Erhaltungsgröße.

Als drittes Beispiel betrachten wir die infinitesimale Transformationen, die durch eine kartesische Komponente des Gesamtdrehimpulses des Systems also z.B. durch die z Komponente

$$f = \sum_i \left(x_i p_{yi} - y_i p_{xi}\right)\,, \tag{2.108}$$

erzeugt wird. Dazu berechnen wir die zugehörige Transformation der Koordinaten wie z.B.

$$\begin{aligned} \delta x_j &= \varepsilon \left\{ x_j, \sum_{i=1}^{N} \left(x_i p_{yi} - y_i p_{xi}\right) \right\} \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \left(\{x_j, x_i p_{yi}\} - \{x_j, y_i p_{xi}\}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{\{x_j, x_i\}}_{=0} p_{yi} + \underbrace{\{x_j, p_{yi}\}}_{=0} x_i - \underbrace{\{x_j, p_{xi}\}}_{=\delta_{ij}} y_i - \underbrace{\{x_j, y_i\}}_{=0} p_{xi} \right) \\
&= -\varepsilon y_j \\
\delta y_j &= \varepsilon x_j \\
\delta z_j &= 0 \\
\delta p_{xj} &= -\varepsilon p_{yj} \\
\delta p_{yj} &= \varepsilon p_{xj} \\
\delta p_{zj} &= 0\,. \qquad (2.109)
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir also mit $\vec{a}$ den Ortsvektor $\vec{r}_i$ oder Impulsvektor $\vec{p}_i$ eines Teilchens i, so werden also all diese Vektoren durch die infinitesimale Transformation übergeführt in

$$
\begin{aligned}
a_x &\Rightarrow \widetilde{a_x} &= a_x - \varepsilon a_y \\
a_y &\Rightarrow \widetilde{a_y} &= a_y + \varepsilon a_x \\
a_z &\Rightarrow \widetilde{a_z} &= a_z
\end{aligned}
\qquad (2.110)
$$

beziehungsweise dargestellt in Matrixschreibweise

$$
\begin{aligned}
\tilde{\vec{a}} &= \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \qquad (2.111)
\end{aligned}
$$

Die infinitesimale Transformation, die durch die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses $f = l_z$ in (2.108) erzeugt wird entspricht also einer Drehung aller Vektoren $\vec{a}$ um die z-Achse mit dem infinitesimalen Winkel ε (beziehungsweise einer Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $-\varepsilon$). Ändert sich die Hamiltonfunktion bei einer solchen Transformation nicht, ist ihr Wert also invariant gegenüber einer Drehung um die z-Achse, so ist nach dem Noether Theorem, die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses eine Erhaltungsgröße für die Entwicklung des Systems. Man sagt die Hamiltonfunktion ist **rotationsinvariant** bezüglich der z-Achse. Entsprechendes lässt sich natürlich auch für die x- und y-Achse formulieren.

Als letztes Beispiel wollen wir die Hamiltonfunktion als erzeugende Funktion einer infintesimalen Transformation heranziehen. Hängt die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit ab, so ist sie ja eine Konstante der Bewegung (siehe z.B.(**??**)). Mit (2.97) ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die Transformationen

$$
\begin{aligned}
\delta p_i &= \varepsilon \{p_i, H\} &= \varepsilon \dot{p}_i \\
\delta q_i &= \varepsilon \{q_i, H\} &= \varepsilon \dot{q}_i
\end{aligned}
\qquad (2.112)
$$

Dies bedeutet also für die kanonischen Impulse und Koordinaten

$$
\begin{aligned}
p_i(t) &\Rightarrow p_i(t) + \varepsilon \dot{p}_i &= p_i(t + \varepsilon) \\
q_i(t) &\Rightarrow q_i(t) + \varepsilon \dot{q}_i &= q_i(t + \varepsilon)\,. \qquad (2.113)
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten und Impulse zur Zeit t werden also transformiert in die Koordinaten und Impulse zur Zeit $t+\varepsilon$ also um eine infinitesimale Zeit verschoben. Die Hamiltonfunktion ist also die erzeugende Funktion für eine Verschiebung in der Zeit.

2.5.1 Infinitesimale Drehungen und Drehungen um einen vorgegebenen Winkel

Zum Abschluss dieses Abschnittes sollen Zusammenhänge zwischen einer infinitesimalen Drehung und einer Drehung um einen endlichen, von Null verschhiedenen Winkel erläutert werden. Dabei wollen wir uns zunächst auf Drehungen von Vektoren um die z-Achse beschränken und schreiben die Matrix für die inifinitesimale Drehung in (2.111) in der Form

$$(\mathbb{1}+\varepsilon A_z) \qquad \text{mit} \qquad A_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.114}$$

und der Eins-Matrix $\mathbb{1}$. Wir werden uns nun davon überzeugen, dass die Rotation um einen Winkel φ in N Teilschritte von Drehungen jeweils um den Winkel φ/N unterteilt werden kann. Lässt man die Zahl der Teilschritte gegen Unendlich wachsen, $N \to \infty$, so sind die einzelnen Drehwinkel infinitesimal und wir können für die Matrix der Gesamtdrehung schreiben

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{\varphi}{N} A_z\right)^N . \tag{2.115}$$

Zum Beweis dieser Beziehung berechnen wir zunächst einmal die Potenzen der Matrix A_z zu

$$\begin{aligned} A_z^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_z^3 &= -A_z \\ A_z^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_z^5 &= A_z\,, \end{aligned} \tag{2.116}$$

womit sich natürlich auch die höheren Potenzen ergeben. Berechnet man nun mit der Binomialformel (die Klammern bezeichnen die Binomialkoeffizienten)

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{1} + \frac{\varphi}{N} A_z\right)^N &= \sum_{i=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{\varphi}{N} A_z\right)^i \\ &= \mathbb{1} + \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\varphi}{N} A_z + \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\varphi^2}{N^2} A_z^2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.117}$$

so kann man sich die einzelnen Matrixelemente der resultierenden Matrix berechnen. Als Beispiel soll das Element in der ersten Zeile und Spalte herangezogen werden. Wegen der

Ergebnisse für die Potenzen A_z^i in (2.116) ergeben sich nur Beiträge zu diesem Element für die geraden Potenzen von A_z in der Form

$$\begin{aligned} 1 - \binom{N}{2}\frac{\varphi^2}{N^2} + \binom{N}{4}\frac{\varphi^4}{N^4} - \dots \\ = 1 - \frac{N(N-1)}{2!}\frac{\varphi^2}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!}\frac{\varphi^4}{N^4} - \dots . \end{aligned} \tag{2.118}$$

Im Grenzfall $N \to \infty$ ergibt sich daraus

$$1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \dots = \cos\varphi$$

also genau das Ergebnis für das erste Matrixelement in (2.115). In analoger Weise kann man (2.115) auch für die anderen Matrixelemente verifizieren.

Eine andere Sichtweise ergibt sich aus der folgenden Überlegung. Bezeichnen wir mit $\vec{a}(\varphi)$ den Vektor, der durch Drehung um den Winkel φ aus den Vektor $\vec{a} = \vec{a}(0)$ enstanden ist, also mit der Bezeichnung aus (2.115)

$$\vec{a}(\varphi) = R_z(\varphi)\vec{a}(0) .$$

Dann ergibt sich $\vec{a}(\varphi + d\varphi)$, der durch eine zusätzliche Drehung um den infinitesimalen Winkel $d\varphi$ entsteht durch

$$\vec{a}(\varphi + d\varphi) = (\mathbb{1} + d\varphi A_z)\, \vec{a}(\varphi)$$

Dies kann man auch als Differenzialgleichung schreiben

$$\frac{d\vec{a}}{d\varphi} = A_z\vec{a}$$

mit der Lösung

$$\vec{a}(\varphi) = e^{\varphi A_z}\vec{a}(0) .$$

Natürlich müssen wir noch erklären, wie die Matrix A_z als Exponent der Zahl e zu verstehen ist. Die Definition ist so zu verstehen, dass wir die Exponentialfunktion in Reihe entwickeln. Mit den Ergebnissen aus (2.116) ergibt sich dann

$$e^{\varphi A_z} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi^i}{i!} A_z^i = R_z(\varphi) .$$

Zum guten Schluss seien jetzt Drehungen um x, y und z-Achse um infinitesimale Winkel $d\Omega_x$, $d\Omega_y$ und $d\Omega_z$ betrachtet. Zunächst überzeugen wir uns davon, dass bei infinitesimalen Winkeln die Reihenfolge der Drehungen um die verschiedenen Achsen irrelevant ist. So gilt z.B.

$$\begin{aligned} R_z(d\Omega_z)R_x(d\Omega_x) &= (\mathbb{1} + d\Omega_z A_z)\,(\mathbb{1} + d\Omega_x A_x) \\ &= \mathbb{1} + d\Omega_z A_z + d\Omega_x A_x + \underbrace{d\Omega_z A_z d\Omega_x A_x}_{=0} \\ &= (\mathbb{1} + d\Omega_x A_x)\,(\mathbb{1} + d\Omega_z A_z) \\ &= R_x(d\Omega_x)R_z(d\Omega_z) . \end{aligned} \tag{2.119}$$

Der Grund für diese Identität liegt darin, dass das Glied quadratisch in infinitesimalen Winkeln $d\Omega_z d\Omega_x$ in der zweiten Zeile unterdrückt werden kann. Damit ergibt sich also eine allgemeine Rotation um die infinitesimalen Winkel $d\Omega_x$, $d\Omega_y$ und $d\Omega_z$

$$\begin{aligned} R(d\vec{\Omega}) &= (\mathbb{1} + d\Omega_x A_x + d\Omega_y A_y + d\Omega_z A_z) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -d\Omega_z & d\Omega_y \\ d\Omega_z & 1 & -d\Omega_x \\ -d\Omega_y & d\Omega_x & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{2.120}$$

Damit ergibt sich für einen entsprechend gedrehten Vektor

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{a}} &= R(d\vec{\Omega})\vec{a} \\ &= \vec{a} + \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_z & d\Omega_y \\ d\Omega_z & 0 & -d\Omega_x \\ -d\Omega_y & d\Omega_x & 0 \end{pmatrix} \vec{a} \\ &= \vec{a} + d\vec{\Omega} \times \vec{a} . \end{aligned} \tag{2.121}$$

Der Übergang zur letzten Zeile kann leicht dadurch verifiziert werden, dass man einerseits das Produkt der Matrix in der zweiten Zeile mit $\vec{a}$ berechnet und andererseits das Vektorprodukt aus $d\vec{\Omega}$, mit den kartesischen Komponeneten $d\Omega_x$, $d\Omega_y$ und $d\Omega_z$ und dem Vektor $\vec{a}$ bestimmt. Betrachten wir nun den Vektor $\vec{a}$ einerseits in einem mitrotierenden (körperfesten) Koordinatensystem und andererseits in einem Koordinatensystem, in dem dieser Vektor $\vec{a}$ nach einer Zeit dt in den Vektor $\tilde{\vec{a}}$ gedreht ist, so ergibt sich für zeitliche Änderungen in diesem Laborsystem

$$\frac{d\tilde{\vec{a}}}{dt} = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{\mathrm{Lab}} = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{\mathrm{Kö}} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{a} , \tag{2.122}$$

die Beziehung zwischen Zeitableitungen von Vektorfunktionen im Laborsystem und in einem körperfesten Koordinatensystem, das mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

mitrotiert (Vergleiche Vorlesung Physik I).