2.4 Poisson Klammern

In diesem Abschnitt soll ein mathematisches Werkzeug eingeführt werden, die sogenannten Poisson Klammern. Diese Poisson Klammern sind eigentlich nur eine abkürzende Beschreibung, es wird sich aber zeigen, dass man mit dieser Abkürzung einige komplexe Zusammenhänge sehr elegant formulieren kann. Darüber hinaus besitzen die Poisson Klammern ein Analogon in der Quantenmechanik, die Kommutator Klammern. Über diese Brücke Poisson Klammern und Kommutator Klammern können viele Verbindungen zwischen der Quantenmechanik und der Klassischen Mechanik verifiziert werden.

Zunächst wollen wir den Begriff der **Dynamischen Variablen** einführen. Die Entwicklung eines mechanischen Systems mit n Freiheitsgraden wird ja durch seine Trajektorie im Phasenraum beschrieben. Sein Zustand ist also durch die Angabe von n generalisierten Koordinaten q_i und entsprechenden kanonischen Impulsen p_i eindeutig definiert. Eine dynamische Variable ist einfach eine beliebige Funktion

$$f(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t) \qquad \text{oder} \qquad g(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t)\,,$$

dieser Koordinaten und Impulse. Beispiele für solche dynamischen Variablen sind also etwa die Hamiltonfunktion, die kinetische Energie, der gesamte Drehimpuls des Systems oder aber auch eine Koordinate $f = q_i$ oder ein Impuls $f = p_j$.

Für zwei dynamische Variable f und g wird die **Poisson Klammer** durch zwei geschweifte Klammerm angezeigt und ist definiert durch

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\,. \tag{2.76}$$

Das Ergebnis ist im Allgemeinen wiederum eine Funktion, die von den Koordinaten und Impulsen des Systems abhängt, also ebenfalls eine dynamische Variable. Die Poisson Klammer ist also wie die Summation oder die Multiplikation eine mathematische Verknüpfung, die jeweils zwei Elementen einer Menge (beziehungsweise einer Gruppe oder eines Körpers) ein Element dieser Menge zuordnet.

Dabei ergeben sich unter anderem die folgenden Eigenschaften, die man leicht beweisen kann (f, g, h sind dynamische Variable, λ eine Konstante):

$$\begin{aligned}
\{g, f\} &= -\{f, g\} \qquad \text{und} \qquad \{f, f\} = 0\,, && (2.77)\\
\{g + f, h\} &= \{g, h\} + \{f, h\}\,, && (2.78)\\
\{\lambda f, g\} &= \lambda\{f, g\}\,, && (2.79)\\
\{gf, h\} &= f\{g, h\} + \{f, h\}g\,. && (2.80)
\end{aligned}$$

Aus (2.77) sieht man, dass das Ergebnis der Poisson Klammer von der Reihenfolge der Argumente f und g abhängt. Die mathematische Verknüpfung $\{g, f\}$ ist also nicht kommutativ. Ja im Gegenteil wegen $\{g, f\} = -\{f, g\}$ nennt man diese Verknüpfung antikommutativ. Andererseits erfüllen die Poisson Klammern das Distributivgesetz bezüglich der Addition von dynamischen Variablen (2.78) und der Multiplikation mit einer Konstanten λ (2.79).

Die Poisson Klammern erfüllen kein Assoziativgesetz, es gilt also im allgemeinen

$$\{f, \{g, h\}\} \neq \{\{f, g\}, h\}\,.$$

Stattdessen gilt die sogenannte **Jacobi Identität**

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0\,. \tag{2.81}$$

Der Beweis dieser Identität ist etwas mühsam aber durch direktes Ausrechnen leicht zu erzielen.

Die Poisson Klammern sind sehr hilfreich, um Konstanten der Bewegung zu identifizieren. Eine dynamische Variable f, die nicht explizit von der Zeit abhängt, ist genau dann eine Konstante der Bewegung, wenn die Poisson Klammer von f mit der Hamiltonfunktion H des Systems verschwindet. Zum Beweis berechnen wir einfach

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right]\\ &= \frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right]\\ &= \frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}\,,\end{aligned} \tag{2.82}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurden die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen benutzt, in der dritten Zeile die Definition der Poisoon Klammer.

Als einfaches Anwendungsbeispiel zeigen wir noch einmal, dass der Wert der Hamiltonfunktion konstant ist, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt (siehe (**??**). Die Anwendung von (2.82) liefert

$$\frac{dH}{dt}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0\,\text{nach Vor.}}+\{H,H\}\overset{\text{siehe (2.77)}}{=}0\,.$$

Mit dem Ergebnis (2.82) kann man auch sehr leicht die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen verifizieren und darstellen. Mit $f=p_k$ gilt ja

$$\dot{p}_k=\{p_k,H\}=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial q_i}}_{=0}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_i}}_{=\delta_{ki}}\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\,.$$

Entsprechend für $f=q_k$ ergibt sich

$$\dot{q}_k=\{q_k,H\}=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_i}}_{=\delta_{ki}}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_i}}_{=0}\frac{\partial H}{\partial q_i}=\frac{\partial H}{\partial p_k}\,.$$

Bis zu diesem Punkt haben wir stets einen Satz von generalisierten Koordinaten und Impulsen genommen, um die Poisson Klammern zu berechnen. Die Frage erhebt sich natürlich, ob das Ergebnis von der Wahl dieser Basis des Phasenraumes abhängt. Man kann jedoch zeigen, dass die Berechnung der Poisson Klammer invariant unter einer Kanonischen Transformation der Koordinaten und Impulse ist. Sind also $f(p,q)$ und $g(p,q)$

wie zuvor dynamische Variable definiert mit den Koordinaten p und q, ist eine Kanonische Transformation der Form $(p,q) \to (P,Q)$ gegeben und bezeichnen $\tilde{f}(P,Q)$ und $\tilde{g}(P,Q)$ die entsprechenden Variablen, dargestellt in den neuen Koordinaten, so dass

$$\tilde{f}(P,Q) = f(p,q) \qquad \text{und} \qquad \tilde{g}(P,Q) = g(p,q)$$

dann ist das auch die Poisson Klammer invariant unter der Koordinatentransformation, also

$$\{f,g\}_{p,q} = \{\tilde{f},\tilde{g}\}_{P,Q}\,, \tag{2.83}$$

wobei die unteren Indices (p,q bezihungsweis P,Q) angeben in welcher Basis die Poissonklammer berechnet wird.

Der Beweis von (2.83) ist etwas aufwändig und wird deshalb hier nicht ausgeführt.[1] Das Ergebnis ist aber sofort plausibel, wenn man sich vor Augen hält, dass ja die zeitliche Entwicklung einer dynamischen Variable unabhängig von der Basis sein muss, in der man diese Observable darstellt. Nun gilt nach (2.82)

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\}_{p,q} = \frac{d\tilde{f}}{dt} = \{\tilde{f},\widetilde{H}\}_{P,Q}\,.$$

Da dies für eine beliebige Funktion f und auch für jede Hamiltonfunktion gilt, sollte (2.83) auch allgemein gelten.

Eine andere Anwendung sind die sogenannten **Fundamentalklammern**, die wie man durch Ausrechnen leicht verifizieren kann, gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \{p_i,p_j\} &= \{q_i,q_j\} = 0\,, \\ \{q_i,p_j\} &= \delta_{ij}\,. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Diese Ergebnisse für die Fundamentalklammern sind so charakteristisch, dass sogar gilt: Eine Transformation $q_i,p_j \to Q_i,P_j$ ist genau dann kanonisch, wenn auch für die neuen Koordinaten gilt:

$$\{P_i,P_j\} = \{Q_i,Q_j\} = 0 \qquad \text{und} \qquad \{Q_i,P_j\} = \delta_{ij}\,.$$

Zum Beweis berechnen wir

$$\begin{aligned} \dot{Q}_j &= \{Q_j,H\} = \sum_l \left[\frac{\partial Q_j}{\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_l}\frac{\partial H}{\partial q_l}\right] \\ \dot{P}_j &= \{P_j,H\} = \sum_l \left[\frac{\partial P_j}{\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial P_j}{\partial p_l}\frac{\partial H}{\partial q_l}\right]\,. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Stellen wir uns nun die Hamiltonfunktion dargestellt in den neuen Variablen vor, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_l} &= \sum_k \left[\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_l}\right] \\ \frac{\partial H}{\partial q_l} &= \sum_k \left[\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_l}\right] \end{aligned} \tag{2.86}$$

[1] der Beweis findet sich z.B. in W.Nolting: Theoretische Physik 2, Abschnitt 2.4.2

Setzt man diese Gleichungen in die erste Zeile von (2.85) so ergibt sich nach einer einfachen Umgruppierung

$$\begin{aligned}\dot{Q}_j &= \sum_k \left[\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_k}\{Q_j, Q_k\} + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_k}\{Q_j, P_k\}\right] \\ &= \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_j} \end{aligned} \tag{2.87}$$

Die letzte Gleichung muss erfüllt sein, damit die Transformation kanonisch ist. Diese Gleichung ist aber genau dann erfüllt, wenn $\{Q_j, Q_k\} = 0$ und $\{Q_j, P_k\} = \delta_{jk}$. Entsprechend können wir (2.86) in die zweite Zeile von (2.85) einsetzten und erhalten wieder nach Umformungen

$$\begin{aligned}\dot{P}_j &= \sum_k \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_k}\{P_j, Q_k\} + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_k}\{P_j, P_k\} \\ &= -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_j}\,. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Diese letzte Gleichung (die notwendig erfüllt sein muss, damit die Transformation kanonisch ist) ist genau dann erfüllt, wenn $\{P_j, P_k\} = 0$ und $\{P_j, Q_k\} = -\delta_{jk}$, also genau die Fundamentalklammern gelten.

Als eine weitere Anwendung der Poisson Klammern wollen wir nun zeigen, dass die Poisson Klammer von zwei Konstanten der Bewegung selbst eine Konstante der Bewegung ist, d.h.:

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dg}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d\{f,g\}}{dt} = 0\,. \tag{2.89}$$

Zum Beweis schreiben wir die Zeitableitung der Poisson Klammer gemäß (2.82)

$$\begin{aligned}\frac{d\{f,g\}}{dt} &= \frac{\partial\{f,g\}}{\partial t} + \{\{f,g\}\,, H\} \\ &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{H, \{f,g\}\} + \{H, \{f,g\}\} + \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\}\,. \end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir (2.77) auf die Poisson Klammer mit der Hamiltonfunktion in der ersten Zeile angewandt. Ausserdem wurde ein Null in Form einer Jacobi Identität (2.81) hinzugefügt. Da sich der dritte und vierte Term in dieser zweiten Zeile kompensieren, erhalten wir nach zweimaligem Anwenden der Rechenregel (2.77) auf den letzten Term in der Zeile

$$\begin{aligned}\frac{\{f,g\}}{dt} &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \{\{H,f\}\,, g\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \{f, \{g, H\}\} \\ &= \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurde wieder (2.82) angewandt. Da aber die Poisson Klammer von $0 = df/dt = dg/dt$ (siehe Voraussetzung (2.89)) mit einer dynamischen

Variable verschwindet folgt der Übergang zur letzten Zeile, womit der Beweis erbracht ist.

Eine interessante Anwendung dieses Ergebnisses ergibt sich für den Drehimpuls eines Teilchens. Wir betrachten dazu die Bewegung eines Teilchens in einem konservativen Kraftfeld ohne Zwangsbedingungen. Die kartesischen Koordinaten des Teilchens (x, y, z) und die zugehörigen Impulskomponenten (p_x, p_y, p_z) sind also eine geeignete Basis des Phasenraumes. In diesen generalisierten Koordinaten und Impulsen, ergeben sich für die Darstellung der kartesischen Komponenten des Drehimpulses

$$\begin{aligned} l_x &= yp_z - zp_y \\ l_y &= zp_x - xp_z \\ l_z &= xp_y - yp_x \,. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Berechnet man z.B. die Poisson Klammer für die Komponenten l_x und l_y, so ergibt sich mit Anwendung des Distributivgesetzes (2.78)

$$\{l_x, l_y\} = \{yp_z, zp_x\} - \{yp_z, xp_z\} - \{zp_y, zp_x\} + \{zp_y, xp_z\} \ .$$

Zur weiteren Behandlung betrachten wir den ersten Term auf der rechten Seite und wenden die Regel (2.80) wiederholt an. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \{yp_z, zp_x\} &= \underbrace{\{y, z\}}_{=0} p_z p_x + \underbrace{\{y, p_x\}}_{=0} p_z z + \underbrace{\{p_z, z\}}_{=-1} y p_x + \underbrace{\{p_z, p_x\}}_{=0} yz \\ &= -yp_x \,. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für die Poisson Klammern in der ersten Zeile ergeben sich durch die Fundamental Klammern (2.84). Entsprechende Behandlung der anderen Terme in der obigen Gleichung liefert schliesslich

$$\{l_x, l_y\} = -yp_x + xp_y = l_z \,. \tag{2.91}$$

Ganz analog kann man auch zeigen, dass die Beziehung auch gilt, wenn man in dieser Gleichung die Komponenten l_x, l_y, l_z zyklisch vertauscht, also:

$$\{l_x, l_y\} = l_z \quad \text{und} \quad \{l_x, l_y\} = l_z \,. \tag{2.92}$$

Die Komponenten des Drehimpulses sind also keine unabhängigen dynamischen Variablen. Sind nämlich zwei Komponenten, also z.B. l_x und l_y Konstanten der Bewegung, so gilt mit (2.89) und (2.91), dass auch die dritte Komponente l_z konstant ist.