2.2 Bedeutung der Hamiltonfunktion und Beispiele

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Grundgleichungen des Hamilton Formalismus hergeleitet haben, sollen hier einige Eigenschaften der Hamiltonfunktion erläutert und an Beispielen veranschaulicht werden.

Zunächst soll gezeigt werden, dass die Hamiltonfunktion eine Konstante der Bewegung ist, wenn die Lagrangefunktion (und damit auch die Hamiltonfunktion) nicht explizit von der Zeit abhängen. Dies bedeutet, dass der Zahlenwert der Hamiltonfunktion sich in diesem Fall während der zeitlichen Entwicklung des Systems nicht ändert, auch wenn natürlich die aktuellen Werte für die generalisierten Koordinaten und Impulse von der Zeit abhängen.

Zum Beweis dieser Behauptung netrachten wir die totale Ableitung nach der Zeit

$$\frac{dH(p_i, q_i, t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} .$$

Berücksichtigen wir nun, dass die partielle Ableitung von H nach der Zeit gleich dem negativen der partiellen Ableitung der Lagrangefunktion ist (**??**) und damit nach Voraussetzung identisch Null ist, und beachten ausserdem die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (**??**), so ergibt sich

$$\frac{dH(p_i, q_i, t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = 0 , \tag{2.15}$$

was wir ja beweisen wollten.

Sind die Zwangsbedingungen nicht zeitabhängig und ist das Potenzial unabhängig von den Geschwindigkeiten, so haben wir ja in (**??**) gezeigt, dass

$$\sum_j p_j \dot{q}_j = 2T ,$$

also das doppelte der kinetischen Energie T ist. In diesem Fall ist der Wert der Hamiltonfunktion

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V , \tag{2.16}$$

gleich der Energie des Systems. Man muss also in diesem Fall die Hamiltonfunktion nicht über die Definitionsgleichung (**??**) bestimmen sondern man kann sie direkt als Summe von kinetischer Energie plus potenzieller Energie, dargestellt als Funktion der generalisierten Koordinaten q_i und kanonischen Impulsen, berechnen.

Als ein erstes Anwendungsbeispiel betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes m, die auf dem Mantel eines Zylinders (Radius R, Zylinderachse parallel zur z-Achse, siehe Abb. 2.1) beschränkt sein soll. Ausserdem sei dieser Massenpunkt über eine Feder mit der Federkonstanten k mit dem Koordinatenursprung (auf der Zylinderachse) verbunden. Zur Behandlung dieses Problems bieten sich die Zylinderkoordinaten (r, φ, z) an. Die kinetische Energie für ein Teilchen der Masse m schreibt sich in diesen Zylinderkoordinaten

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) .$$

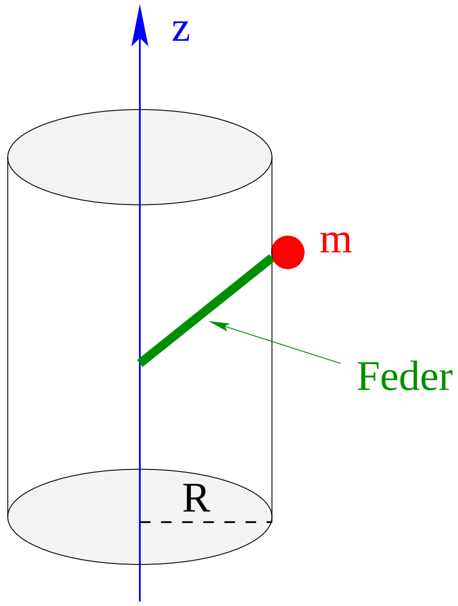

Abbildung 2.1: *Massenpunkt m auf dem Mantel eines Zylinders*

Ist die Bewegung der Masse m auf den Mantel des Zylinders mit Radius $r = R$ beschränkt, reduziert sich dieser Ausdruck auf ($\dot{r} = 0$, siehe auch (**??**))

$$T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) .$$

Mit der potenziellen Energie $V = k/2(R^2 + z^2)$ für die Kraft der Feder ergibt sich also die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{k}{2}\left(R^2 + z^2\right) . \tag{2.17}$$

Da die Lagrangefunktion nicht von der generalisierten Koordinate φ abhängt (φ ist also zyklisch) ist der zugehörige Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} , \tag{2.18}$$

eine Konstante der Bewegung. Damit ist also auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ eine Konstante der Bewegung und durch die Anfangsbedingungen $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ festgelegt. Bestimmen wir ausserdem den Winkel zur Startzeit $t = 0$ auf φ_0, so ergibt sich sofort

$$\varphi(t) = \varphi_0 + t\dot{\varphi}_0 ,$$

die Winkelfunktion ist also eindeutig für alle Zeiten festgelegt.

Für die zweite generalisierte Koordinate z des Systems erhalten wir die Lagrange Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z} = \frac{\partial L}{\partial z} = -kz ,$$

und daraus

$$\ddot{z} = -\omega^2 z \qquad \text{mit} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} . \tag{2.19}$$

Die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung lässt sich darstellen in der Form

$$z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,,$$

wobei die Konstanten A und B durch die Starbediungungen festzulegen sind. Wir haben hier die Lagrange Bewegungsgleichungen bestimmt und gelöst.

Als Alternative dazu sollen jetzt die entsprechenden Hamiltonschen Bewegungsgleichungen bestimmt werden. Der kanonische Impuls für die generalisierte Koordinate φ ist bereits in (2.18) definiert und die entsprechende Gleichung für die Koordinate z liefert

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\,. \tag{2.20}$$

Damit können wir die Hamiltonfunktion gemäß der Definition (**??**) berechnen

$$\begin{aligned}
H &= p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L \\
&= mR^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{k}{2}\left(R^2 + z^2\right) \\
&= \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{k}{2}\left(R^2 + z^2\right) \\
&= T + V
\end{aligned}$$

Wir haben also bis zu diesem Punkt nur bestätigt, dass die Hamiltonfunktion auch in diesem Fall die Gesamtenergie angibt. Dies ist aber keine Überraschung, da auch bei diesem Beispiel die Zwangsbedingungen zeitunabhängig sind und das Potenzial nicht von der Geschwindigkeit abhängt, so dass die Voraussetzungen für (2.16) gegeben sind.

Für die Anwendung der Hamiltonschen Bewegungsgleichung ist es nun erforderlich, die Hamiltonfunktion als Funktion der Koordinaten und Impulse zu bestimmen. Dies geschieht durch

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(R^2 + z^2\right)\,. \tag{2.21}$$

Da φ eine zyklische Koordinate ist, ist, wie bereits diskutiert, p_φ eine Konstante der Bewegung und somit ist auch der erste Summand, genau so wie der dritte, lediglich eine Konstante. Wir betrachten die Hamiltonfunktion also lediglich als Funktion der Koordinate z und des zugehörigen Impulses p_z. Dies führt zu den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{p_z} &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \\
\dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}
\end{aligned}$$

Diese zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung entsprechen natürlich der Lagrange Bewegungsgleichung (2.20), was man am einfachsten dadurch verifiziert, dass man die zweite dieser Gleichungen noch einmal nach der Zeit ableitet:

$$\ddot{z} = \frac{\dot{p_z}}{m} = -\frac{k}{m}z\,.$$

Dementsprechend ist natürlich auch die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen identisch mit der der Lagrange Gleichungen.

Als ein zweites Beispiel betrachten wir die Bewegung einer Masse m in einem konservativen zentralen Kraftfeld, das durch das Zentralpotenzial $V(r)$ mit r dem Abstand vom Kraftzentrum und Koordinatenursprung. In diesem Fall bieten sich die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) als geeignete generalisierte Koordinaten an, und man erhält für die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) - V(r)\,. \tag{2.22}$$

Bei der Bewegung in einem Zentralfeld bleibt der Drehimpuls erhalten, was auch bedeutet, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt. Das Koordinatensystem kann also so festgelegt werden, dass $\varphi = 0$, dafür aber ϑ Werte zwischen 0 und 2π annehmen kann. Damit entfällt der dritte Term in (2.22) und der Winkel ϑ wird zu einer zyklischen Koordinate. Daraus folgt wiederum, dass der zugehörige Impuls

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} = l\,, \tag{2.23}$$

eine Konstante der Bewegung ist. Diese Konstante entspricht dem Betrag des Drehimpulses des Teilchens l. Mit dem kanonischen Impuls

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} \tag{2.24}$$

ergibt sich dann die Hamiltonfunktion zu

$$H = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \tag{2.25}$$

und die kanonischen Bewegungsgleichungen schreiben sich

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}\\ \dot{p_r} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\right)}_{:=V_{\text{effektiv}}(r)}\,.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Diese Bewegungsgleichungen für $r(t)$ haben also mathematisch die gleiche Gestalt, wie für die Bewegung der Masse m in einem eindimensionalen Problem mit einem effektiven Potenzial

$$V_{\text{effektiv}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}\,. \tag{2.27}$$

Für ein attraktives Potenzial $V(r)$ sind in Abb. 2.2 dieses Potenzial und ein zugehöriges effektives Potenzial skizziert. Für $l \neq 0$ liefert der Zusatzterm einen repulsiven Beitrag, der für $r \to 0$ divergiert. Dieser sogenannte **Zentrifugalterm** hat seinen Ursprung in der kinetischen Energie, wie man aus der obigen Herleitung leicht sieht. Er bringt zum Ausdruck, dass man bei festem Wert des Drehimpulses l hohe Winkelgeschwindigkeiten und damit einen großen Beitrag zur kinetischen Energie erbringen muss, wenn der Abstand des Teilchens r vom Zentrum klein wird.

Die Form des effektiven Potenzials und unsere Erfahrungen mit mechanischen Problemen in einer Dimension lassen uns erahnen, wie die Lösungen für $r(t)$ aussehen werden. Bringt

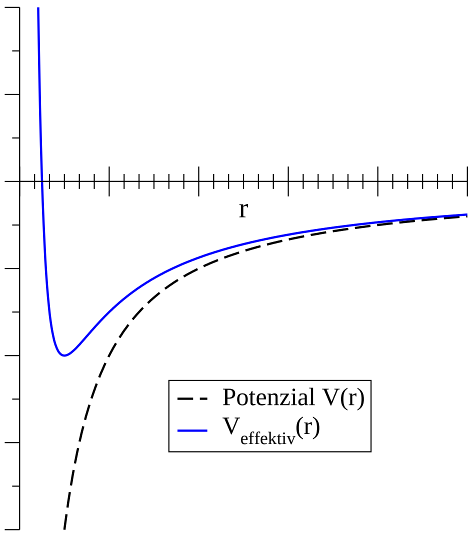

Abbildung 2.2: *Potenzial plus Zentrifugalterm in einem Zentralfelproblem (siehe (2.27)).*

man das Teilchen auf eine Umlaufbahn, bei der der Abstand r gerade der Position des Minimums von $V_{effektiv}$ entspricht und ist $\dot{r} = 0$, so erwarten wir eine stabile Bahn mit festem Wert für r. Wird zu einer Zeit t_0 das System gestartet mit einem Wert von r, der von diesem Minimalwert abweicht, so erwarten wir eine Schwingung der Funktion $r(t)$ um dieses Minimum. Die Frequenz dieser Schwingung könnte man durch eine Taylor - Entwicklung des effektiven Potenzials um das Minimum leicht abschätzen.

Diese Schwingung für $r(t)$ beschreibt natürlich nur den Zeitverlauf der radialen Koordinate. Damit sind aber über (2.23) auch die aktuellen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\vartheta}(t)$ bestimmt (l bleibt ja konstant), was uns auch erlaubt, den aktuellen Positionswinkel $\vartheta(t)$ zu berechnen.

Ein weiteres Beispiel von großer Bedeutung ist die Behandlung eines Teilchens mit der Masse m und der Ladung e in einem elektromagnetischen Feld. Im Abschnitt **??** haben wir gezeigt, dass die elektromagnetischen Kräfte auf eine Ladung durch ein geschwindigkeitsabhängiges Potenzial beschrieben wird (siehe (**??**)), so dass sich eine Lagrangefunktion ergibt

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r}) + e\vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} . \tag{2.28}$$

Dabei entsprechen z.B. die kartesischen Koordinaten des Teilchens den generalisierten Koordinaten ($r_i = q_i$, $i = x, y, z$) und entsprechendes gilt für die Geschwindigkeiten. Die Felder Φ und $\vec{A}$ sind die üblichen Potenziale zur Bestimmung der elektromagnetischen Felder. Mit dieser Lagrangefunktion ergeben sich die kanonischen Impulse

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + eA_i \,, \tag{2.29}$$

wobei, A_i die entsprechende kartesische Komponente des Vektorfeldes $\vec{A}$ bezeichnet. Damit ergibt sich die Hamiltonfunktion

$$H \;=\; \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L$$

$$\begin{aligned} &= m\dot{\vec{r}}^2 + e\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - \left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi + e\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\right) \\ &= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + e\Phi\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Dies ist gerade die gesamte Energie als Summe der kinetischen Energie plus der potenziellen Energie der Ladung im "elektrostatischen" Potenzial. Dieses Ergebnis war nicht zu erwarten, da wir es ja hier mit einem geschwindigkeitsabhängigen Potenzial zu tun haben, so dass die Voraussetzungen für (2.16) nicht erfüllt sind.

Sind die elektromagnetischen Potenziale konstant also unabhängig von der Zeit, so hängt auch H nicht explizit von der Zeit ab und ist somit eine Konstante der Bewegung (siehe(2.15)).

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung müssen wir den Ausdruck (2.30) umschreiben in eine Funktion der kanonischen Impulse. Mit (2.29) ergibt dies

$$H = \frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m} + e\Phi\,. \tag{2.31}$$

Man kann dieses Ergebnis auch in dem folgenden Rezept für die **minimale Substitution** zusammenfassen: Ausgehend von der Hamiltonfunktion des freien Teilchens

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

erhält man die Hamiltonfunktion des geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld durch folgende Ersetzungen:

$$\begin{aligned} H &\Rightarrow H - e\Phi \\ \vec{p} &\Rightarrow \vec{p} - e\vec{A}\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

In einem weiteren Schritt wollen wir uns nun die Hamiltonfunktion zur Beschreibung der relativistischen Kinematik ansehen. In einem ersten Teil wollen wir uns davon überzeugen, dass die Kinematik eines freien Teilchens, auf das also keine Kräfte wirken, durch die Lagrangefunktion

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}\,, \tag{2.33}$$

beschrieben wird. Dabei steht c für die Lichtgeschwindigkeit und $\dot{\vec{r}}$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens im aktuellen Koordinatensystem. Diese Lagrangefunktion sieht auf den ersten Blick etwas merkwürdig aus, insbesondere da ja nach unseren bisherigen Regeln die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen durch die kinetische Energie gegeben sein soll, der Ausdruck (2.33) aber negative Werte liefert. Mit den folgenden Argumenten wollen wir uns aber davon überzeugen, dass (2.33) eine richtige Wahl für die Lagrangefunktion darstellt.

- Als erstes betrachten wir den nichtrelativistischen Grenzfall dieser Lagrangefunktion, also den Fall für den der Quotient $\dot{\vec{r}}^2/c^2$ klein ist im Vergleich zu 1. Dann können wir die Taylorentwicklung der Wurzel in (2.33) betrachten

$$\begin{aligned} L &= -mc^2 \left[1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}\right)^2 + \dots \right] \\ &= -mc^2 + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \dots \end{aligned} \tag{2.34}$$

In diesem Grenzfall liefert L also gerade den nichtrelativistischen Ausdruck für die kinetische Energie minus einer Konstanten (mc^2), die ja für die Bewegungsgleichung oder bei der Formulierung des Hamiltonschen Prinzips keine Rolle spielt.

- Nach dem Hamiltonschen Prinzip legt das System ja den Weg zurück, für den die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt\,, \tag{2.35}$$

ein Extremum ist. Dieses Variationsverfahren sollte natürlich in jedem Koordinatensystem das gleiche Ergebnis liefern. Der Wert des Integrals, beziehungsweise der Integrant sollte also invariant unter einer Lorentztransformation sein. Nun hängt aber der jeweilige Wert der Lagrangefunktion L in (2.33) von der Geschwindigkeit des Teilchens ab und damit natürlich auch vom Koordinatensystem. Andererseits wissen wir aber natürlich, dass sich auch die Zeit t und damit auch die Differenzialform dt bei einer Lorentztransformation ändert. Die Eigenzeit, also die Zeit, die im Koordinatensystem gemessen wird, das sich mit dem Teilchen mitbewegt ist eine Lorentzskalar also invariant unter Lorentztransformation. Diese Eigenzeit τ ergibt sich aus der Zeit, die in einem Koordinatensystem gemessen wird, das sich mit der Geschwindigkeit $|\dot{\vec{r}}|$ relativ zum Eigensystem bewegt durch

$$\tau = t\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}\,,$$

was ja für die zugehörigen Differentialformen bedeutet, dass

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}\, dt\,. \tag{2.36}$$

Damit können wir den Integranten im Wirkungsintegral (2.35) umschreiben

$$L\, dt = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}\, dt = -mc^2\, d\tau\,.$$

Dieser Ausdruck ist also das Produkt zweier Lorentsskalare: der Differenzialform der Eigenzeit $d\tau$ und der invarianten Zahl $-mc^2$, die wir ja als Lagrangefunktion in dem System interpretieren können, in dem sich das Teilchen nicht bewegt und in dem dann auch die Eigenzeit gemessen wird.

- Schliesslich liefert, und das ist ja eigentlich das entscheidende Merkmal, die Lagrangefunktion (2.33) aber auch die richtige Bewegungsgleichung. So gilt ja

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{d}{dt}\frac{m\dot{r}_i}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt}p_i = F_i = \frac{\partial L}{\partial r_i}\,. \tag{2.37}$$

  Die Zeitableitung der Komponenten des relativistischen Impulses

$$p_i = \frac{m\dot{r}_i}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}}\,, \tag{2.38}$$

  entspricht der entsprechenden Komponente der Kraft F_i, was ja gerade die Aussage der Newtonschen Bewegungsgleichung ist.

Mit den Komponenten des kanonischen Impulses p_i in (2.38) können wir nun die Hamiltonfunktion bestimmen:

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i\dot{r}_i - L \\ &= \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} \quad = \quad E\,. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Nach (2.16) ist dies also die Energie des freien Teilchens. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass im nichtrelativistischen Grenzfall dieser Ausdruck neben der Ruheenergie des Massenpunktes

$$E = mc^2$$

als nächsten Term die nichtrelativistische kinetische Energie enthält.

Für die weiteren Betrachtungen wollen wir die Hamiltonfunktion beziehungsweise den Ausdruck für die Energie als Funktion des kanonischen Impulses darstellen. Dazu quadrieren wir die letzte Zeile von (2.39)

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{m^2c^4}{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} \\ &= \frac{m^2c^4 - m^2c^2\dot{\vec{r}}^2}{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + \frac{m^2c^2\dot{\vec{r}}^2}{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} \\ &= m^2c^4 + c^2\vec{p}^2\,. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Dies bedeutet also, dass die Hamiltonfunktion für ein relativistisches freies Teilchen lautet

$$E = H(p) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}\,. \tag{2.41}$$

Wir können diese Energie - Impulsbeziehung aber auch umschreiben auf die Form

$$m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = p_0^2 - \sum_i p_i^2 = p^\mu p_\mu\,, \tag{2.42}$$

mit dem kontravarianten Vektor

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Der dreidimensionale Impulsvektor $\vec{p}$ wird also ergänzt durch die zeitartige (nullte) Komponente $p^0 = E/c$, so dass das Betragsquadrat dieses Vierevektors den Lorentsskalar m^2c^2 liefert (siehe (2.42).

Mit diesen Bezeichnungen bekommt auch die minimale Substitution (2.32) eine neue Bedeutung. Wir wissen aus der Elektrodynamik, dass die Potenzialfelder einen Lorentzvektor bilden

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}.$$

Damit schreibt sich nun die Regel der minimalen Substitution

$$p^\mu \quad \Rightarrow \quad p^\mu - eA^\mu \tag{2.44}$$

Die Wirkung der elektromagnetischen Felder wird dadurch berücksichtigt, dass der kontravariante Impulsvektor des freien Teilchen ergänzt wir durch die Addition des kontavarianten Vektors der Potenzialfelder multipliziert mit der negativen Ladung des Teilchens $(-e)$, was natürlich wieder zu einem kontravarianten Vektor führt. Durch diese einfache Addition der Vektoren wird also auf einfachste (minimalste) Art gewährleistet, dass die Berücksichtigung der elektromagnetischen Felder die Kovarianz der Bewegungsgleichungen unter Lorentztransformationen nicht zerstört.

Diese minimale Substitution führt zu einer relativistischen Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld der Form

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2} + e\Phi\,. \tag{2.45}$$