1.7 Erhaltungssätze und Symmetrien I

Die Ziffer I in der Überschrift zu diesem Abschnitt weist darauf hin, dass wir den Zusammenhang zwischen Symmetrien des Systems und Erhaltungsgrößen der Bewegung nicht nur in diesem Abschnitt behandeln wollen, sondern auf dieses wichtige Thema auch im weiteren Verlauf der Vorlesung noch zurückkommen werden.

Für eine erste Beschreibung definieren wir einen **generalisierten Impuls** eines Systems als die partielle Ableitung der Lagrange Funktion L nach einer generalisierten Geschwindigkeit $\dot{q}_j$:

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \,. \tag{1.109}$$

Diese Größe p_j bezeichnet man auch häufig als **kanonischen Impuls** oder als zur generalisierten Koordinate q_j **konjugierten Impuls**. Zur Charakterisierung dieses Begriffes *generalisierter Impuls* zunächst einige Anmerkungen:

- Im Fall eines freien Teilchens der Masse m in einem konservativen Kraftfeld beschrieben durch ein Potenzial V können wir die kartesischen Koordinaten des Teilchens als generalisierte Koordinaten annehmen und die Lagrange Funktion schreiben in der Form

  $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z) \,.$$

  Damit ergibt sich für den generalisierten Impuls, den wir auch als zur generalisierten Korrdinate x konjugierten Impuls bezeichen können

  $$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \,.$$

  Dieser Impuls p_x ergibt sich also wie die gewöhnliche Imulskomponente p_x des Newtonschen Impulses als das Produkt der Masse mit der Geschwindigkeit des Teilchens.

- Die generalisierten Impulse entsprechen aber natürlich nicht immer der Definition des konventionellen Newtonschen Impulses, sie haben häufig sogar eine andere Dimension. Als Beispiel betrachten wir hier die Bewegung eines Massenpunktes in einem konservativen Kraftfeld, dessen Bewegungsfreiheit durch Zwangsbedingungen auf den Mantel eines Zylinders mit dem Radius R und der zentralen Achse entlang der z-Achse eingeschränkt ist. In diesem Fall bieten sich natürlich die Zylinderkoordinaten φ und z als generalisierte Koordinaten an. Die Lagrangefunktion ergibt sich dann als

  $$L = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\varphi, z) \,. \tag{1.110}$$

  Der zum Winkel φ zugehörige kanonische Impuls ist dann

  $$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \,. \tag{1.111}$$

  Dies ist gerade die z-Komponente des Drehimpulses des Teilchens bezogen auf den Koordinatenursprung.

- Ganz andere Definitionen für den generalisierten Impuls ergeben sich, wenn man geschwindigkeitsabhängige Kräfte und entsprechende Potenziale betrachtet. Als Beispiel sei die Lagrange Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld herangezogen (siehe Abschnitt **??**, (**??**)). In diesem Fall ist die Lagrangefunktion gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - e\Phi(x,y,z) + e\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{pmatrix}. \tag{1.112}$$

Der generalisierte Impuls p_x ergibt sich also in diesem Fall als

$$p_x = m\dot{x} + eA_x(x,y,z)\,. \tag{1.113}$$

Ausserdem soll hier der Begriff **zyklische Koordinate** oder auch **ignorable Koordinate** eingeführt werden. Ist ein System durch die generalisierten Koordinaten $q_1 \ldots q_n$ definiert, so sagt man, dass die generalisierte Koordinate q_j zyklische ist genau dann, wenn die Lagrange Funktion nicht von dieser Koordinate abhängt. Es gilt also:

$$q_j \quad \text{ist zyklisch} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,. \tag{1.114}$$

Damit können wir sofort den folgenden Satz beweisen:

Satz: Der zu einer zyklischen Koordinate q_j zugehörige generalisierte Impuls p_j ist eine Konstante der Bewegung.

Mit den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen gilt ja

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt}p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \underbrace{=}_{\text{siehe (1.114)}} 0\,.$$

Ist also etwa im oben diskutierten Beispiel (1.110) des Teilchens auf dem Zylindermantel das Potenzial unabhängig von der Richtung die durch den Winkel φ definiert ist, so ist diese generalisierte Koordinate zyklisch. Es gilt also in diesem Fall, dass der zugehörige Impuls p_φ, der ja nach (1.111) die z-Komponente des Drehimpulses ist, eine Konstante der Bewegung ist. Ist also das Problem symmetrisch in Bezug auf eine Drehung um die z-Achse, so ist der zugehörige Bahndrehimpuls des Teilchens, l_z, eine Konstante der Bewegung. Dies gilt auch, wie man leicht sieht, wenn die Beschränkung der Bewegung auf die Oberfläche des Zylinders entfällt.

Eine andere Symmetrie liegt vor, wenn das System unabhängig ist gegenüber einer Verschiebung der Zeit, man sagt auch invariant gegenüber einer Translation der Zeit. Dies bedeutet, dass die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt und auch die Zwangsbedingungen nicht zeitabhängig sind. Ist in diesem Fall das Potentzial V unabhängig von den Geschwindigkeiten der Teilchen, so ist die Gesamtenergie E, definiert als die Summe von kinetischer Energie der Teilchen und dem Wert des Potenzials V

$$E = T + V = \text{konst.} \tag{1.115}$$

eine Konstante der Bewegung. In diesem Fall übernimmt also die Energie die Rolle der zur Koordinate Zeit t konjugierten Impulsvariable, eine Interpretation auf die wir noch zurückkommen werden.

Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir die totale Ableitung der Lagrangefunktion L nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(q_j\dot{q}_j,t) &= \sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt}\right)+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0\,\text{nach Voraus.}}\\
&= \sum_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt}\right)\\
&= \sum_j\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)\\
&= \frac{d}{dt}\sum_j p_j\dot{q}_j\,.
\end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurden die Lagrange Bewegungsgleichungen benutzt. Man kann also das Ergebnis dieser Rechnung zusammenfassen zu

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j p_j\dot{q}_j\;-\;L\right)=0,$$

was ja bedeutet, dass

$$\sum_j p_j\dot{q}_j\;-\;L=\text{konstant}\,, \tag{1.116}$$

eine Konstante der Bewegung ist. Zur Berechnung dieser Konstanten wollen wir zunächst die kinetische Energie als Funktion der q_i und $\dot{q}_i$ darstellen. Da die Zwangsbedingungen nach Voraussetzung nicht zeitabhängig sein sollen, ist auch die Darstellung der Ortsvektoren der einzelnen Massenpunkte als Funktion der generalisierten Koordinaten nicht explizit abhängig von der Zeit. Für die Geschwindigkeiten des Massenpunkte i ergibt sich dann

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\dot{\vec{r}}_i=\sum_j\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\,. \tag{1.117}$$

Dies führt zu einer kinetischen Energie der Form

$$T=\sum_i\frac{m_i}{2}\left(\sum_j\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2=\sum_{j,k}\frac{\alpha_{jk}}{2}\dot{q}_j\dot{q}_k\,, \tag{1.118}$$

also eine quadratische Form in den Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ mit Koeffizienten

$$\alpha_{jk}=\sum_i m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}=\alpha_{kj}\,, \tag{1.119}$$

die von den generalisierten Koordinaten q_l abhängen können, nicht aber von den zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{q}_l$. Damit berechnet sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \alpha_{jj}\dot{q}_j+\sum_{j\neq k}\left(\frac{\alpha_{jk}}{2}\dot{q}_k+\frac{\alpha_{kj}}{2}\dot{q}_k\right)\\
&= \sum_k\alpha_{kj}\dot{q}_k\,.
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Für den Fall, dass das Potenzial nicht von den Geschwindigkeiten abhängt gilt dann für die generalisierten Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k \alpha_{kj} \dot{q}_k \,,$$

und

$$\sum_j p_j \dot{q}_j = \sum_{j,k} \alpha_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j = 2T \,, \tag{1.121}$$

wie ein Vergleich mit (1.118) zeigt. Damit ist aber die Erhaltungsgröße aus (1.116)

$$\sum_j p_j \dot{q}_j \; - \; L = 2T - (T - V) = T + V = E$$

mit der Energie identifiziert. Die Energie ist also unter den gegebenen Voraussetzungen eine Konstante der Bewegung.