1.2 Das D'Alembertsche Prinzip

Wir betrachten wieder ein System bestehend aus N Massenpunkten, deren Bewegung eventuell durch k Zwangsbedingungen eingeschränkt sein sollen. Die Ortsvektoren dieser N Teilchen sind dann durch jeweils $3N - k$ Koordinaten $q_1 ... q_{3N-k}$ eindeutig definiert. Sind die holonomen Zwangsbedingungen für das System explizit zeitabhängig, so word auch der Zusammenhang zwischen den Ortsvektoren der Teilchen und den generalisierten Koordinaten von der Zeit abhängen:Hinzu kommt natürlich noch, dass im Allgemeinen Fall von der Zusammenhang zwischen den $3N$ Koordinaten und den Ortsvektoren auch von der Zeit t abhängen kann:

$$\vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) .$$

Wir definieren nun eine **virtuelle Verrückung** als eine infinitesimale Veränderung des Systems, die mit den Zwangsbedingungen zur gegebenen Zeit verträglich ist. Der Ortsvektor des Teilchens i ändert sich also bei einer solchen virtuellen Verrückung um

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha . \tag{1.9}$$

Dabei stehen die δq_α für eine infinitesimale Kombination der Änderung der $3N - k$ generalisierten Koordinaten des Systems.

Zur Verdeutlichung dieser Definition der virtuellen Verrückung betrachten wir einen Käfer, der sich auf dem Boden eines Aufzuges frei in der xy- Ebene bewegen kann. Der Aufzug selbst bewege sich mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung aufwärts. Die Bewegung des Käfers unterliegt also einer zeitabhängigen Zwangsbedingung der Form

$$z - vt = 0 \tag{1.10}$$

Eine virtuelle Verrückung für die Bewegung des Käfers muss berücksichtigen, dass der Wert für die z-Komponente des Käfers durch die Zwangsbedingung (1.10) festgelegt ist, sie hat also die Form

$$\delta\vec{r} = \delta x \hat{e}_x + \delta y \hat{e}_y$$

Bei der Bewegung des Käfers in xy-Richtung bewegt sich aber gleichzeitig der Aufzug das Stück $v\delta t$ in z-Richtung, sodass die reale Bewegung des Käfers die Form

$$d\vec{r} = \delta x \hat{e}_x + \delta y \hat{e}_y + v \delta t \hat{e}_z$$

annimmt.

Im Beispiel des Käfers im Aufzug sorgt die Kraft, die vom Boden des Aufzugs auf den Käfer ausgeübt wird, dafür, dass die Zwangsbedingung erüllt wird. Allgemein definieren wir all die Kräfte, die die Einhaltung der Zwangsbedingungen herbeiführen, als **Zwangskräfte**.

Die Wirkung dieser Zwangskräfte soll an einem weiteren Beispiel verdeutlicht werden. In diesem Fall betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes mit der Masse m im Graviationsfeld der Erde, gegeben durch die Kraft (siehe Abb.1.1)

$$\vec{F} = -mg\hat{e}_y . \tag{1.11}$$

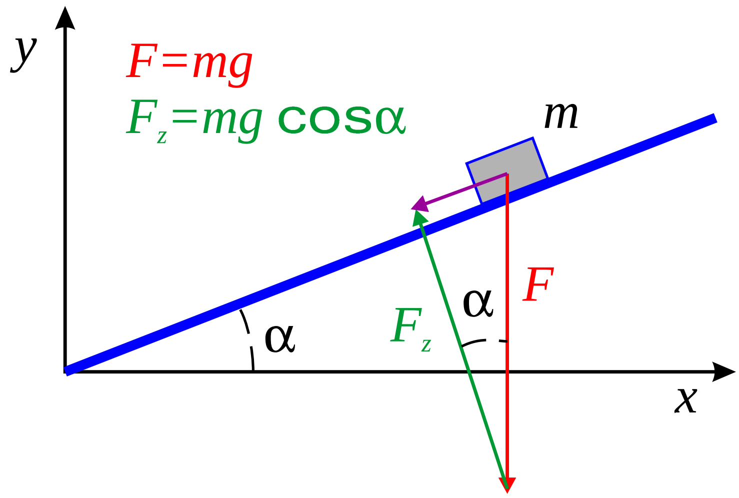

Abbildung 1.1: *Kräfte auf einen Massenpunkt der Masse m auf einer schiefen Ebene*

Dieser Massenpunkt soll sich allerdings nicht frei bewegen sondern auf einer schiefen Ebene, die mit der x-Achse den Winkel α bildet. Die z- Komponenenten der Vektoren spielen für diese Diskussion keine Rolle und werden deshalb nicht beachtet. Die Beschränkung der Bewegung wird durch die Zwangsbedingung

$$f(x,y) = x\sin\alpha \;-\; y\cos\alpha \;=\; 0 \tag{1.12}$$

beschrieben. Damit die Zwangskraft gewährleisten, dass die Bewegung nur unter Einhaltung der Zwangsbedingung, also entlang der schiefen Ebene erfolgt, muss sie den Betrag und Richtung haben, wie in Abb. 1.1 skizziert. Das bedeutet: die Zwangskraft ist definiert durch

$$\begin{aligned} \left|\vec{F}^{\mathrm{Zwang}}\right| &= mg\cos\alpha \\ \vec{F}^{\mathrm{Zwang}} &= mg\cos\alpha\,\{\cos\alpha\hat{e}_y - \sin\alpha\hat{e}_x\}\;. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Die Zwangskräfte sind also so zu konstruieren, dass sich das Teilchen i bewegt als ob auf dieses Teilchen eine Gesamtkraft wirken würde

$$\vec{F}_i^{\mathrm{Gesamt}} = \vec{F}_i + \vec{F}_i^{\mathrm{Zwang}} \tag{1.14}$$

die neben der eplizit wirkenden Kraft $\vec{F}_i$ auch die Zwangskraft enthält, die für die Beachtung der Zwangsbedingungen sorgt. Wenn man die Zwangskräfte kennt, so kann man die Bewegung der Teilchen des Systems durch die Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\vec{F}_i^{\mathrm{Gesamt}} - \dot{\vec{p}_i} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1...N\,, \tag{1.15}$$

berechnen. Natürlich kann man jede dieser N Bewegungsgleichungen mit einem Vektor $\Delta\vec{r}_i$ multiplizieren und dann aufaddieren, was zu einer Gleichung

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}_i}\right)\Delta\vec{r}_i + \vec{F}_i^{\mathrm{Zwang}}\Delta\vec{r}_i\right\} = 0\,, \tag{1.16}$$

führt. Eine weitere Behandlung erlaubt nun das **D'Alembertsche Prinzip**, welches als ein Grundpostulat für die Beschreibung der Bewegung von Massenpunkten unter Zwangsbedingungen darstellt.

D'Alembertsche Prinzip:

Die zeitliche Entwicklung des Systems erfolgt in Richtung solcher virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$, für die gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{Zwang}} \delta\vec{r}_i = 0\,. \tag{1.17}$$

Zu diesem D'Alembertschen Prinzip einige Anmerkungen:

- Das D'Alembertsche Prinzip besagt also, dass nur solche Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ in Betracht kommen, bei denen die Zwangskräfte keine Arbeit verrichten. Anders ausgedrückt: die Zwangskräfte stehen senkrecht zur Ebene der erlaubten virtuellen Verrückungen. Dies ist natürlich auch leicht einzusehen: die Zwangskräfte sollen ja gerade solche Verrückungen zulassen, bei denen alle Bewegungen, bei denen die Zwangsbedingungen eingehalten werden, wie freie Bewegungen ablaufen. Andererseits aber sollen all solche Bewegungen, bei denen die Zwangsbedingungen verletzt werden, vollständig unterdrückt sein.

- Das oben aufgeführte Beispiel des Käfers im Aufzug zeigt uns auf, warum wir die virtuellen Verrückungen benötigen, um das D'Alembertsche Prinzip zu formulieren. Die Zwangskraft in diesem Beispiel steht in Richtung der z-Achse und damit senkrecht zu den virtuellen Verrückungen in der xy-Ebene. Die realen Verrückungen besitzen aber eine Komponente in z- Richtung, sodass die Zwangskräfte entlang der realen Verrückungen Arbeit leisten, eben gerade die Energie, die erforderlich ist, den Käfer mit dem Aufzug hinaufzutransportieren.

- Bei einem System mit mehreren Massenpunkten können wir virtuelle Verrückungen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind, nicht für jeden Massenpunkt unabhängig identifizieren. Ist z.B. der Abstand zweier Massenpunkt durch eine Zwangsbedingung fixiert, so hängt die erlaubte virtuelle Verrückun $\delta\vec{r}_2$ des zweiten Punktes von der gleichzeitigen Bewegung des ersten Punktes. Deshalb kann das D'Alembertsche Prinzip natürlich nicht für jeden Massenpunkt isoliert formuliert werden (das wäre also die Gleichung (1.17) für jeden Punkt i ohne die Summe). Die Forderung, dass die Zwangskräfte senkrecht zu den erlaubten virtuellen Verrückungen steht muss also durch das Skalarprodukt der Zwangskräfte mit den Verrückungen im $3N$ dimensionalen Raum der Koordinaten aller N Teilchen formuliert sein, so wie das auch in (1.17) der Fall ist.

Wie kann man nun die erlaubten virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$, beziehungsweise die entsprechenden Zwangskräfte identifizieren? Ausgangspunkt dazu sind natürlich die Zwangsbedingungen, die für die Koordinaten der Teilchen vor und nach der Verrückung erfüllt sein müssen. Es muss also für alle $l = 1...k$ gelten

$$f_l(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) = f_l(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) = 0\,. \tag{1.18}$$

Da es sich bei den virtuellen Verrückungen um infinitesimale Verrückungen handelt, können wir die Zwangsbedingung an der Stelle $\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i$ entwickeln um den Punkt $\vec{r}_i$ und die Entwicklung nach der ersten Potenz in den $\delta\vec{r}_i$ abbrechen:

$$f_l(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) = f_l(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, t) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_l}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i\,. \tag{1.19}$$

Dabei steht die Ableitung nach dem Vektor für

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_l}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i &= \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_l}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_l}{\partial z_i}\delta z_i \\ &= \vec{\nabla}_i f_l \delta\vec{r}_i\,. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Mit dieser Nomenklatur ergeben sich also aus (1.18) und (1.19) die k (entspricht der Anzahl der Zwangsbedinungen) Bestimmungsgleichungen für die Verrückungen $\delta\vec{r}_i$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i f_l \delta\vec{r}_i = 0 \quad \text{für} \quad l = 1...k\,. \tag{1.21}$$

Da die Zwangsbedingungen und damit auch diese k Gleichungen die erlaubten virtuellen Verrückungen eindeutig festlegen, kann die Gleichung des D'Alembertschen Prinzips (1.17), die ja auch eine Gleichung linear in den $\vec{\delta r}_i$ ist, keine zusätzliche Bedingung an die virtuellen Verrückungen darstellen. Sie muss vielmehr eine Linearkombination der Bestimmungsgleichungen in (1.21) sein, also vom Typ

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{Zwang}} \delta\vec{r}_i = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i f_l \delta\vec{r}_i\,, \tag{1.22}$$

mit Konstanten, λ_l, die noch zu bestimmen sind. Aus dieser Gleichung entnehmen wir eine Darstellung für die Zwangskraft auf das Teilchen i in der Form

$$\vec{F}_i^{\text{Zwang}} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{\nabla}_i f_l\,. \tag{1.23}$$

Setzen wir diese Darstellung der Zwangskräfte in die Bewegungsgleichung (1.15) ein, so erhalten wir die

Lagrange Bewegungsgleichungen 1.Art:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i + sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{\nabla}_i f_l \quad i = 1...N \tag{1.24}$$

$$f_l(\vec{r}_i, t) = 0 \quad k = 1...l\,. \tag{1.25}$$

Bei diesen Gleichungen handelt es sich um N Vektor-Differenzialgleichungen (1.24) und k algebraische Gleichungen (1.25) Diese Zahl von $3N+k$ unabhängigen Gleichungen ist notwendig und hinreichend um die Unbekannten, N Vektorfunktionen $\vec{r}_i(t)$ und k Parameter $\lambda_l(t)$ eindeutig zu bestimmen. Die Gleichungen besitzen also bei vorgegebenen Startwerten für $\vec{r}_i(t_0)$ und $\vec{v}_i(t_0)$ eine eindeutige Lösung. Neben dem Ablauf der Bewegung, dargestellt durch $\vec{r}_i(t)$, erhält man auch die Koeffizienten λ_l und mit (1.23) die Zwangskräfte, die auf die einzelnen Massenpunkte wirken.

Als ein Beispiel für die Lösung eines Problems mit Zwangsbedingungen unter Benutzung der Lagrange Bewegungsgleichungen erster Art greifen wir das Beispiel des Massenpunktes auf der schiefen Ebene, dargestellt in Abb. 1.1, auf. Für diesen Massenpunkt haben wir zwei Zwangsbedinungen

$$f_1(x,y,z) = x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0 \tag{1.26}$$

$$f_2(x,y,z) = z = 0 \tag{1.27}$$

Die Gradienten dieser beiden Zwangsbedingungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f_1 &= \sin\alpha\hat{e}_x - \cos\alpha\hat{e}_y \\ \vec{\nabla} f_2 &= \hat{e}_z \end{aligned}$$

und damit erhalten wir für die Zwangskraft den Ansatz

$$\vec{F}^{\text{Zwang}} = \lambda_1\left(\sin\alpha\hat{e}_x - \cos\alpha\hat{e}_y\right) + \lambda_2\hat{e}_z \tag{1.28}$$

Mit der Kraft durch das Gravitationsfeld der Erde (1.11) ergibt sich also die Bewegungsgleichung vom Typ (1.24) zu

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\sin\alpha \\ -mg - \lambda_1\cos\alpha \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Diese 3 Gleichungen bilden zusammen mit den 2 Zwangsbedingungen (1.26) und (1.27) die 5 Lagrangegleichungen 1. Art, die wir benötigen um die 5 Unbekannten λ_1, λ_2, x, y und z zu bestimmen. Die Gleichungen für $z(t)$ und λ_2, das sind die dritte Komponente von (1.29) und (1.27) entkoppeln von den anderen Gleichungen und werden gelöst durch

$$z(t) = \dot{z}(t) = \ddot{z}(t) = 0\,,$$

und wir können die Beschreibung der Bewegung auf die xy Ebene beschränken. Multipliziert man die erste Komponente von (1.29) mit einem Faktor $\sin\alpha$ und subtrahiert davon die y-Komponente dieser Vektorgleichung multipliziert mit $\cos\alpha$, so ergibt sich die resultierende Gleichung

$$m\left(\ddot{x}\sin\alpha\ -\ \ddot{y}\cos\alpha\right) = \lambda_1\sin^2\alpha + mg\cos\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha\ =\ \lambda_1 + mg\cos\alpha\,. \tag{1.30}$$

Differenziert man die Zwangsbedingung (1.26) zwei mal nach der Zeit und setzt das Ergebnis

$$\ddot{x}\sin\alpha\ -\ \ddot{y}\cos\alpha = 0$$

in (1.30) ein, so erhält man

$$\lambda_1 = -mg\cos\alpha\,.$$

Zusammen mit $\lambda_2 = 0$ ergibt sich damit nach (1.28) für die Zwangskraft

$$\vec{F}^{\text{Zwang}} = -mg\cos\alpha\left(\sin\alpha\hat{e}_x - \cos\alpha\hat{e}_y\right)\,.$$

Wir erhalten also durch konsequentes Auswerten der Lagrange Bewegungsgleichungen den gleichen Ausdruck für die Zwangskraft wie in (1.13), wo in diesem einfachen Fall der schiefen Ebene die Zwangskraft aus geometrischen Überlegungen bestimmt wurde. Die Bewegung des Massenpunktes ergibt sich, wenn wir nun die erste Komponente von (1.29) mit einem Faktor $\cos\alpha$ multiplizieren und darauf die zweite Komponente multipliziert mit $\sin\alpha$ addieren. Dies führt zu

$$m\left(\ddot{x}\cos\alpha\,+\,\ddot{y}\sin\alpha\right) = -mg\sin\alpha\,.$$

Benutzt man nun die Abkürzung

$$q = x\cos\alpha\,+\,y\sin\alpha \tag{1.31}$$

so erhält man für diese **generalisierte Koordinate** die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} = -mg\sin\alpha\,. \tag{1.32}$$

Diese Differenzialgleichung hat die Lösung

$$q(t) = q_0 + \dot{q}_0 t - \frac{1}{2}mg\sin\alpha\, t^2 \tag{1.33}$$

wobei die Konstanten q_0 und $\dot{q}_0$, also der Wert der generaliserten Koordinate und seine Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Ersetzt man nun in (1.31) z.B. die Koordinate x durch $y\cos\alpha/\sin\alpha$, was ja wegen der Zwangsbedingung (1.26) gilt, so ergibt sich

$$y(t) = \frac{q(t)}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \sin\alpha}\,.$$

In analoger Weise ergibt sich auch

$$x(t) = \frac{q(t)}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha}\,.$$

Damit sind also über die Bestimmung der Lösung für die generalisierte Koordinate $q(t)$ in (1.33) auch die kartesischen Koordinaten des Teilchens berechnet.

Die Lösung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster Art für ein System mit N Massenpunkten und k Zwangsbedingungen ist also recht aufwändig, da es auf ein System von $3N + k$ Gleichungen führt. Durch die Zwangsbedingungen wird also die Zahl der Gleichungen nicht reduziert sondern noch erhöht. Als Lohn für diese Mühe bekommt man aber ein Ergebnis, bei dem auch die Zwangskräfte berechnet sind. Diese Verfahren bietet sich also an, wenn man die Stärke und Richtung dieser Zwangskräfte interessiert ist.