

Kapitel 1

Lagrange Formalismus

1.1 Zwangsbedingungen

Behandelt man die Bewegung von N Teilchen, die sich im 3-dimensionalen Raum bewegen können, so ist die Position dieser Teilchen durch $3N$ Koordinaten (jeweils 3 für den Ortsvektor \vec{r}_i eines Teilchens i) festgelegt. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen für ein solches System bestehen aus $3N$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung für diese Koordinaten. Zur Bestimmung einer eindeutigen Lösungen benötigen wir also 2 mal $3N$ Anfangsbedingungen, also z.B. die Vektoren für die Positionen und die Geschwindigkeiten dieser N Teilchen zur Zeit $t = 0$. Diese Anfangsbedingungen definieren den Startpunkt der Bewegung im $6N$ dimensionalen Phasenraum des Problems. Durch die Lösung der $3N$ Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2}{dt^2} m_i \vec{r}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad \text{für } i = 1 \dots N, \quad (1.1)$$

erhalten wir die Funktionen für die Positionen der Teilchen der Masse m_i , $\vec{r}_i(t)$, und ihrer Geschwindigkeiten

$$\vec{v}_i(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t).$$

Die Sequenz dieser Punkte $(\vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t))$ im $6N$ dimensionalen Phasenraum bezeichnet man als die Trajektorie für die zeitliche Entwicklung des Systems.

Man sagt auch: Das System aus N Teilchen, die sich beliebig im Raum bewegen können, besitzt $3N$ Freiheitsgrade. Die Zahl $3N$ bezieht sich auf die Zahl der unabhängigen Koordinaten, die die Position des Teilchen beschreiben.

Diese Zahl der Freiheitsgrade kann eingeschränkt sein. Stellen wir uns als Beispiel ein System aus 2 Massenpunkten vor, die stets einen fest vorgegebenen Abstand a voneinander haben sollen. Diese Beschränkung der Bewegungsfreiheit der Massenpunkte, man spricht von einer **Zwangsbedingung**, könnte durch eine Verbindungsstange realisiert sein, deren Masse bei der Bewegung vernachlässigbar sein soll. Mathematisch ist diese Zwangsbedingung eindeutig formuliert durch die Gleichung

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - a = 0. \quad (1.2)$$

Allgemein, im Fall von N Massenpunkten, definiert eine Gleichung vom Typ

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad (1.3)$$

eine **holonome** Zwangsbedingung. Gilt insbesondere, dass die Zwangsbedingung unabhängig von der Zeit ist, so bezeichnet man die Zwangsbedingung (1.3) als Gleichung für eine **holonome, skleronome** (oder zeitunabhängige) Zwangsbedingung. Wäre die Zwangsbedingung zeitabhängig, wäre also z.B. in dem Beispiel der beiden Massenpunkte aus (1.2) der Abstand a abhängig von der Zeit t , so hat man eine Zwangsbedingung vom Typ

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (1.4)$$

In diesem Fall spricht man von einer **holonomen, rheonomen** (oder eben zeitabhängigen) Zwangsbedingung.

Neben diesen holonomen Zwangsbedingungen gibt es aber auch nicht-holonome Zwangsbedingungen. Als Beispiel stellen wir uns zwei Massen vor, die als harte Kugeln mit jeweils einem Durchmesser d realisiert sind. In diesem Fall müssen die Ortsvektoren der beiden Kugelzentren einen Abstand haben, der größer ist als d . Wir haben also eine Zwangsbedingung der Form

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - d > 0. \quad (1.5)$$

Allgemein definiert eine Gleichung vom Typ

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) > 0 \quad (1.6)$$

eine **nicht holonome** Zwangsbedingung. Auch in diesem Fall kann man natürlich wieder zwischen skleronomen und rheonomen Bedingungen unterscheiden.

Wir werden uns in der Mechanik vor allen Dingen mit holonomen Zwangsbedingungen beschäftigen. Durch eine holonome Zwangsbedingung wird die Zahl der Freiheitsgrade eines Systems um einen Freiheitsgrad reduziert. Ein Freiheitsgrad ist durch die Zwangsbedingung eingefroren oder eliminiert worden. Gibt es k Zwangsbedingungen von diesem Typ, also

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0, \quad \text{für } \alpha = 1 \dots k, \quad (1.7)$$

so wird die Zahl der Freiheitsgrade auf

$$3N - k$$

reduziert. Wichtig ist allerdings dabei, dass die Zwangsbedingungen wirklich unabhängig voneinander sind. Stellen wir uns als Beispiel 3 Massenpunkte vor, also $N = 3$. Die Relativvektoren dieser Massenpunkte seien durch die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{a} &= 0 \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_3 - \vec{b} &= 0 \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_3 - \vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

eingeschränkt. Jede dieser 3 Gleichung ist eine Vektorgleichung wir haben also insgesamt 9 holonome Zwangsbedingungen. Naiv könnte man also jetzt argumentieren, dass die $3N$ Freiheitsgrade durch die $k = 9$ Zwangsbedingungen gerade auf null Freiheitsgrade

reduziert werden. Bei genauerem Hinsehen stellt man aber natürlich fest, dass sich die dritte der 3 oben angegebenen Zwangsbedingungen aus den ersten beiden ergibt mit $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. In Wirklichkeit gibt es also nur 2 mal 3 also 6 unabhängige Zwangsbedingungen. (Vergleiche dazu auch die Definition eines Starren Körpers und seiner Freiheitsgrade.)

Das Problem ist es nun, die $3N - k$ Koordinaten zu finden, die diese Freiheitsgrade beschreiben. Solche Koordinaten, für die dann keine Zwangsbedingungen berücksichtigt werden müssen, nennt man **generalisierte Koordinaten**, q_i für $i = 1 \dots 3N - k$. Die Anforderungen an diese generalisierten Koordinaten lauten also:

- Mit den generalisierten Koordinaten werden alle Zustände des Systems, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind, eindeutig beschrieben.
- Es gibt keine holonomen Zwangsbedingungen für die generalisierten Koordinaten.

Als Beispiel betrachten wir die beiden Massenpunkte mit der holonomen Zwangsbedingung (1.2). Es gilt nun, für $N = 2$ Teilchen und $k = 1$ Zwangsbedingungen $3N - k$, also 5, generalisierte Koordinaten zu finden. In diesem Fall betrachten wir als ersten Schritt die Transformation der Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 auf den Schwerpunktsvektor \vec{R} des Systems

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (1.8)$$

und den Relativvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Die Zwangsbedingung (1.2) besagt, dass der Betrag dieses Relativvektors konstant zu halten ist, nämlich identisch a . Stellt man den Relativvektor in Kugelkoordinaten dar, so ist er mit den entsprechenden Winkeln θ und φ eindeutig festgelegt. Wählen wir also als Koordinaten des System 3 Koordinaten zur Beschreibung von \vec{R} und diese beiden Winkel zur Festlegung von \vec{r} , so können alle Zustände des Systems durch Angabe dieser 5 Koordinaten eindeutig festgelegt werden. Andererseits gibt es für diese Koordinaten keine Zwangsbedingungen, sie können also als generalisierte Koordinaten genutzt werden.

In diesem Fall war es sehr einfach, generalisierte Koordinaten zu identifizieren. In anderen Fällen ist die Bestimmung von geeigneten generalisierten Koordinaten das zentrale Problem. Hat man generalisierte Koordinaten definiert, gilt es dann, entsprechende Bewegungsgleichungen aufzustellen (wir werden dies später bei der Diskussion der Lagrange Bewegungsgleichungen zweiter Art machen) und zu lösen.