

# MR - Mechanische Resonanz

## Praktikum Wintersemester 2005/06

Philipp Buchegger, Johannes Märkle, Alexander Rembold  
Assistent Klemens Rottler

Tübingen, den 17. Februar 2006

### Theoretische Grundlagen

#### Einleitung

In diesem Versuch ging es um die Messung von Resonanz eines zwischen zwei Federn eingespannten Luftkissengleiters, dessen Bewegung mit Magneten durch Wirbelströme gebremst werden kann. Durch einen Motor an einer der Federn kann an den Gleiter eine externe Kraft angelegt werden. Mittels Lichtschranke und Maßband können wir die Auslenkung und Periodendauer messen.

#### Harmonische Schwingung

Wirkt keine externe Kraft, sowie keine Dämpfung durch die Magnete, so gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = -D \cdot x \quad (1)$$

wobei  $D$  die Federhärte ist. Als Lösung ergibt sich:

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

mit  $\omega = \frac{D}{m}$  als Kreisfrequenz und  $\varphi_0$  als Phasenverschiebung.

#### Gedämpfte Schwingung

Mit entgegenwirkender Dämpfung, die mit dem Reibungskoeffizienten  $\eta$  proportional zur Geschwindigkeit ist, gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + Dx = 0 \quad (3)$$

Mit der Güte  $Q$ , die folgendermaßen definiert ist,

$$Q = \frac{\sqrt{Dm}}{\eta} \quad (4)$$

lässt sich die DGL wie folgt schreiben:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

Ansatz für die Lösung:

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda t + \varphi_0} \quad (6)$$

Wobei wir für den Ruhepunkt festlegen:

$$A = x_0 \quad (7)$$

mit dem charakteristischen Polynom:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{(\frac{\omega_0}{Q})^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \quad (8)$$

Man unterscheidet zwischen drei Fällen:

- $Q < \frac{1}{2}$ : Dabei handelt es sich um den „Kriechfall“, bei dem  $\lambda$  komplex wird und keine Schwingung zustande kommt.
- $Q = \frac{1}{2}$ : Beim „Aperiodischen Grenzfall“ nimmt die Schwingung die schnellste Rückkehr zur Ruhelage
- $Q > \frac{1}{2}$ : Es kommen Schwingungen zustande, „Schwingfall“

Am interessantesten ist der Schwingfall, für den folgende Bewegungsgleichung gilt:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \cdot t + \varphi_0) \quad (9)$$

Für  $\omega$  gilt:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (10)$$

Gilt  $t_2 = t_1 + T$ , so ist das Verhältnis der Amplituden  $x(t_1)$  und  $x(t_2)$ :

$$\frac{x(t_2)}{x(t_1)} = \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t_1+T)}}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t_1}} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T} \quad (11)$$

und somit:

$$\ln \frac{x(t_2)}{x(t_1)} = -\frac{\omega_0}{2Q}T = -\frac{\pi}{Q} \quad (12)$$

Das logarithmische Dekrement ist ein Maß für das Dämpfungsverhalten in dem frei schwingenden, gedämpften Schwingungssystem.

## Erzwungene Schwingung

Bei der erzwungenen Schwingung wirkt eine äußere Kraft  $F(t)$  auf den Gleiter, hier handelt es sich um eine periodische Kraft der Form

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_E t + \varphi_0)$$

Für die Bewegungsgleichung gilt dann:

$$m\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_E t + \varphi_0) \quad (13)$$

Als Lösung ergibt sich:

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\omega_E t - \varphi(\omega_E))}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega_E^2}{Q^2}}} = \frac{F_0}{D \sqrt{(1 - \frac{\omega_E^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega_E^2}{Q^2 \omega_0^2}}} \cdot \cos(\omega_E t - \varphi(\omega_E)) \quad (14)$$

Hier ist  $\varphi(\omega_E)$  die Phasenverschiebung zwischen Erregerschwingung und erzwungener Schwingung ist und für die Amplitude  $A$  in Abhängigkeit von  $\omega_E$  gilt:

$$A(\omega_E) = \frac{F_0}{D \sqrt{(1 - \frac{\omega_E^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega_E^2}{Q^2 \omega_0^2}}} \quad (15)$$

Durch umformen bestimmt man als Maximum der Amplitude die Resonanzfrequenz  $\omega_R$  als

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (16)$$

### Bestimmung der Güte Q

Folgende drei verschiedene Methoden können zur Bestimmung der Güte verwendet werden:

a) Eigenfrequenz: Sind Eigenfrequenz und Frequenz mit Dämpfung bekannt, erhält man Q durch:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{17}$$

b) Amplitudenabnahme Mit dem logarithmischen Dekrement ergibt sich

$$\ln \frac{x(t_2)}{x(t_1)} = -\frac{\pi}{Q} \tag{18}$$

c) Breite der Resonanz Trägt man die Amplituden in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $\omega_E$  in ein Diagramm ein, so ergibt sich noch einige Näherungen die Güte als die relative Breite  $\Delta\omega$  der Resonanzkurve im Abstand  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  von der Resonanzfrequenz  $\omega_R$  entfernt:

$$Q \approx \frac{\omega_R}{\Delta\omega} \tag{19}$$

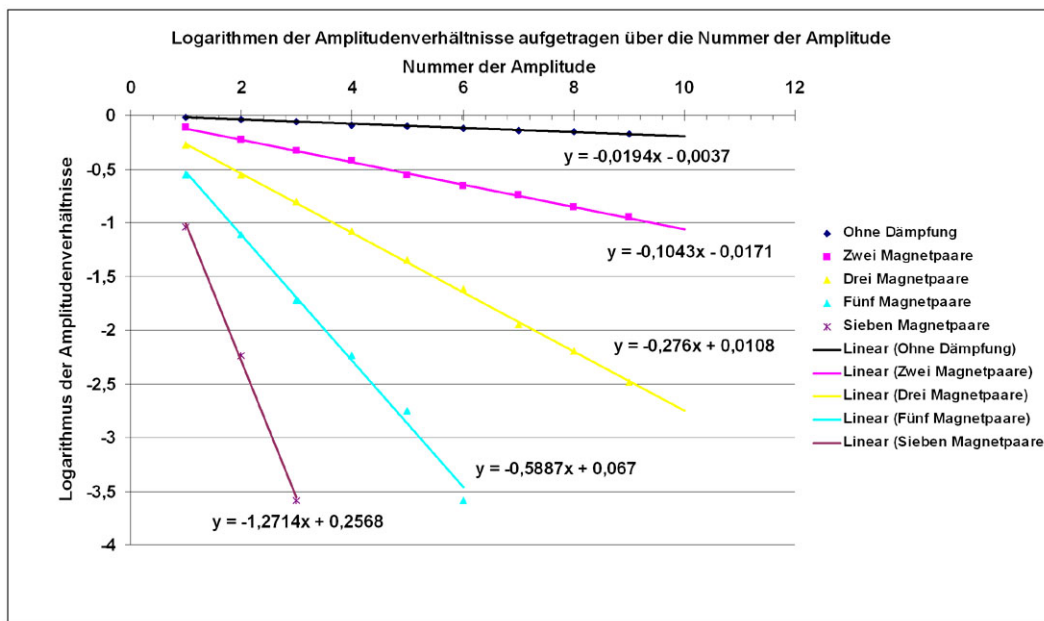
### Auswertung

#### Kreisfrequenzen bei unterschiedlicher Dämpfung

Da sich die Kreisfrequenzen bei unterschiedlicher Dämpfung nur unwesentlich änderten, was wohl an dem Auflösungsvermögen des Periodenmessgeräts lag, konnten auf diese Weise keine Aussagen über die Güte des Systems gemacht werden.

#### Güte und logarithmisches Dekrement

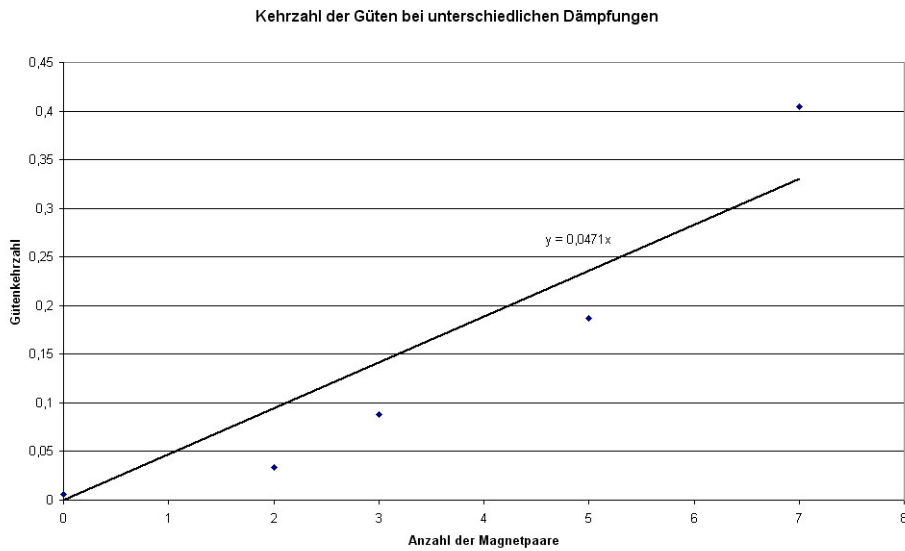
Über die Formel  $Q = \frac{\pi}{m}$  wobei  $m$  die Steigung der Ausgleichsgeraden darstellt, können nun die jeweiligen Güten berechnet werden. Es ergibt sich:



- $Q(0) \approx 161,94$
- $Q(2) \approx 30,12$

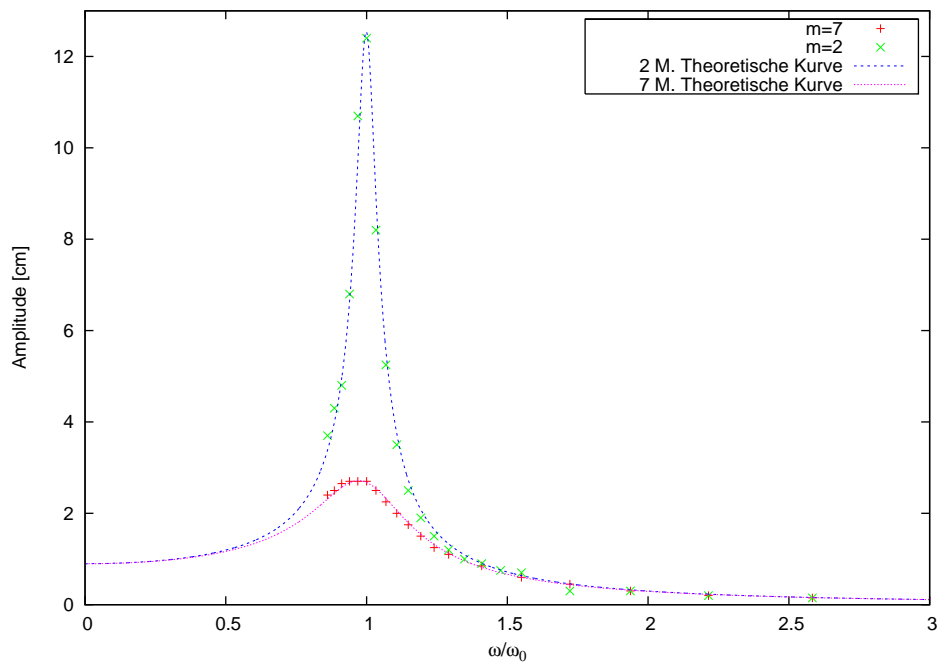
- $Q(3) \approx 11,38$
- $Q(5) \approx 5,34$
- $Q(7) \approx 2,47$

Trägt man nun zusätzlich die erhaltenen Güten reziprok über die Anzahl der Magnetpaare auf, so lässt sich durch eine Ausgleichsgerade und Extrapolation bestimmen, bei welcher Magnetpaaranzahl eine kritische Dämpfung eintreten würde.



Dadurch erhält man  $m_{krit} = 42$ . Es handelt sich um einen linearen Fit mit  $y=0.0471x$

### Gedämpfte Schwingung



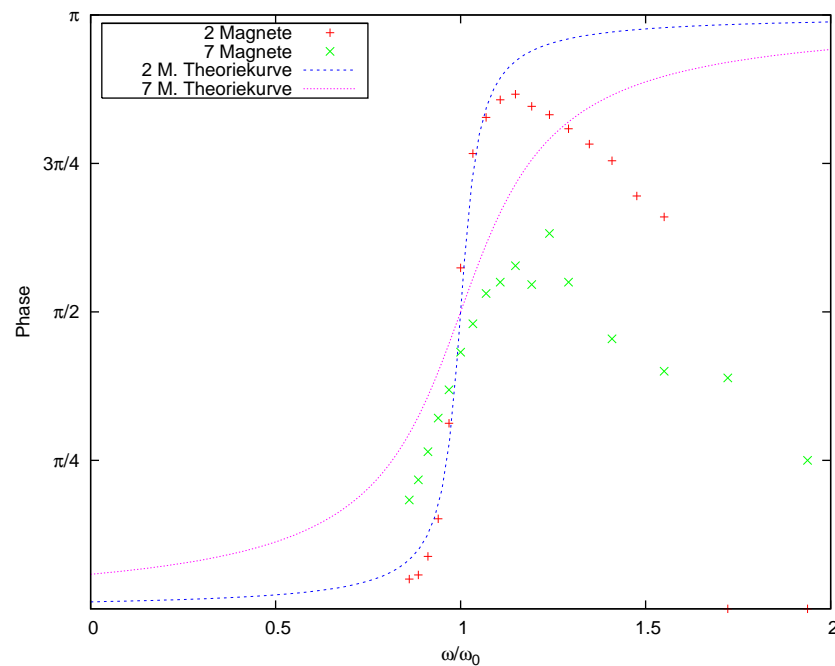
Die Güte  $Q$  wird mittels des bekannten Verlaufs der Funktion  $A(\omega)$  bestimmt:

Dämpfung	$m=2$	$m=7$
Güte $Q$	$13.97 \pm 0.6$	$2.9 \pm 0.09$

Eine Möglichkeit, die Güte zu erhalten, ist mit Hilfe der Breite der Resonanzkurve. An den zwei Stellen, wo die Amplitude  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  des Maximalwerts ist, nimmt man deren Frequenz-Differenz. Nun teilt die Resonanzfrequenz durch die Frequenz-Differenz.

$$Q_7 = \frac{\omega_0}{2 \cdot (1.13 - 0.781)} = 2.9 \quad (20)$$

$$Q_2 = \frac{\omega_0}{2 \cdot (1.03 - 0.962)} = 14.05 \quad (21)$$



Leider war unser System zu stark gedämpft, so dass die Lichtschranke erst ab einer recht starken Resonanz überhaupt eine Phase messen konnte. Das erklärt auch, wieso wir keine vollständige  $\arctan$ -Funktion sehen, sondern nur den Anfang davon. Wir haben den Messfehler für eine hohe Anregfrequenz, da hier das System noch nicht in Resonanz ist und sich quasi nicht von der Stelle bewegt.

## Messwerte

t	m=2			m=7		
Zeit [s]	T	$\Delta T$	A [cm]	T	$\Delta T$	A [cm]
1	2.86	2.36	0.1	3.06	3.00	0.1
1.2	2.44	1.77	0.1	3.83	2.78	0.1
1.4	2.9	2.11	0.2	2.8	1.95	0.2
1.6	2.57	1.07	0.3	3.15	1.95	0.3
1.8	3.14	2.38	0.4	3.48	2.29	0.3
2	2.48	2.57	0.6	20.6	0.66	0.7
2.1	2.3	2.59	0.7	2.1	0.73	0.7
2.2	2.19	0.5	0.8	2.2	0.83	0.9
2.3	2.3	0.6	0.9	2.32	0.90	1
2.4	2.4	0.66	1.1	2.41	0.97	1.2
2.5	2.53	0.79	1.2	2.52	1.04	1.5
2.6	2.59	0.71	1.5	2.62	1.1	1.9
2.7	2.71	0.78	1.7	2.69	1.17	2.5
2.8	2.73	0.77	2	2.8	1.20	3.5
2.9	2.9	0.77	2.25	2.9	1.2	5.2
3	3	0.72	2.5	3	1.15	8.2
3.1	3.1	0.67	2.7	3.1	0.99	12.4
3.2	3.21	0.59	2.7	2	0.5	10.7
3.3	3.29	0.53	2.7	3.3	0.25	6.8
3.4	3.4	0.45	2.65	3.4	0.15	4.8
3.5	3.51	0.38	2.5	3.52	0.1	4.3
3.6	3.6	0.33	2.4	3.6	0.09	3.7