EF - Elektronen im Feld

Praktikum Wintersemester 2005/06

Philipp Buchegger, Johannes Märkle
Assistent Waldemar Kaiser

Tübingen, den 6. März 2006

Theoretische Grundlage

Elektronen im elektrischen Feld

Elektronen die sich in einem elektrischen Feld befinden erfahren die Kraft

$$\vec{F} = e\vec{E} \tag{1}$$

wobei e die Elementarladung darstellt und $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke darstellt. Für einen Plattenkondensator, an dem die Spannung U anliegt und der einen Plattenabstand von d besitzt, ergibt sich für dieses $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{U}{d} \tag{2}$$

Daraus folgt für das sich im Plattenkondensator befindende Elektron, dass es eine konstante Kraft F entgegengesetzt der Feldlinien erfährt:

$$F = e\frac{U}{d} \tag{3}$$

Das Elektron wird folglich eine beschleunigte Bewegung in y-Richtung erfahren, während es sich in x-Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit V_0 bewegen wird:

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{eU}{dm_e}t^2 \tag{4}$$

$$x(t) = V_0 \cdot t \tag{5}$$

Wurde das Elektron nun zuvor mit einer Beschleunigungsspannung U_b auf die Geschwindigkeit V_0 gebracht, so ergibt sich für die Bewegung in x-Richtung:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2eU_b}{m_e}} \cdot t \tag{6}$$

Aus Gleichung 5 und 6 ergibt sich dann für die vertikale Ablenkung Δy:

$$\Delta y = \frac{U}{4dU_b}x^2 \tag{7}$$

Elektronen im Magnetfeld

Bewegen sich Elektronen mit der Geschwindigkeit V_0 im Magnetfeld, so wirkt auf sie die Lorentzkraft:

$$\vec{F} = e\vec{B} \times \vec{V_0} \tag{8}$$

Steht $\vec{V_0}$ nun senkrecht auf $\vec{B}$ so zwingt die Lorentzkraft die Elektronen auf eine Kreisbahn. Sie wirkt folglich wie eine Zentripetalkraft und man erhält:

$$eV_0B = \frac{m_eV_0^2}{r} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{m_e} = \frac{V_0}{Br} \tag{10}$$

Wurden die Elektronen zuvor durch ein elektrisches Feld beschleunigt so gilt für V_0

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = e \cdot U \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \tag{12}$$

B lässt sich dabei bei einfachen symmetrischen Stromverteilungen leicht durch das Gesetz von Biot-Savart berechnen:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{13}$$

Für eine Helmholtzspule ergibt sich dadurch beispielsweise für das B-Feld auf der Symmetrieachse z, mit der Parametrisierung für $d\vec{l} = Rd\varphi\hat{e}_\varphi$ und $\vec{r} = -R\hat{e_r} + (z + \frac{a}{2})\hat{e_z}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR^2\hat{e_z}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{a}{2})^2}} \tag{14}$$

Auswertung

Koordinaten der Bahnpunkte

U_0 [kV]	U_P [kV]	x[cm]	y[cm]
2	1	8	0 .6
2	1	10	0 .9
2	1	7	0 .5
2	1	6	0 .4
2	2	8	1
2	2	10	1 .5
2	2	5	0 .5
2	2	7	0 .9
3	3	10	1 .6
3	3	7 .5	1
3	3	5	0 .5
3	3	9	1 .4
3	5	9 .5	2
3	5	8	1 .5
3	5	7	1 .2
3	5	4	0 .5

Vergleich der Koeffizienten zur Theorie

$U_0[\mathrm{kV}]$	$U_P[\mathrm{kV}]$	$\frac{y}{x^2}[\frac{1}{\mathrm{cm}}]$ gemessen	Theorie $\frac{y}{x^2}[\frac{1}{\mathrm{cm}}]$
2	1	0.0099±0.00081	0.0231
3	3	0.0177±0.00144	0.0463
3	5	0.0253±0.00351	0.0772
2	2	0.0172±0.00203	0.0463

Mit unseren Messwerten sind wir um den Faktor 2 bis 3 von der Theorie entfernt, was uns zu der Vermutung bringt, dass wir einen systematischen Fehler nicht berücksichtigt haben. Die ungenaue Koordinatenursprungsmessung könnte auch dazu beitragen. Würden wir U_0 und U_P im gleichen Verhältnis ändern, so würde es keinen Effekt auf die Elektronenbahn machen, ausser $U_0 = 0$ etc. Nimmt man einfach gelandene Ionen anstatt der Elektronen, so würde auch dies keinen Unterschied machen. Angenommen, die Ionen wären positiv, dann wäre der Verlauf gespiegelt.

$\frac{e}{m}$-Bestimmung

$U_0[kV]$	I[A]	x[cm]	y[cm]	r[cm]	B[mT]	e/m
2	0.2	4	0.9	9.338888889	0.846283563±0.02	$6.4038\cdot10^{11}\pm3.62\cdot10^{4}$
2	0.2	6	1.7	11.43823529	0.846283563±0.02	$4.26884\cdot10^{11}\pm2.41\cdot10^{4}$
2	0.3	3	0.9	5.45	1.269425±0.03	$8.35705\cdot10^{11}\pm6.03\cdot10^{4}$
2	0.3	5	2	7.25	1.269425±0.03	$4.72248\cdot10^{11}\pm3.41\cdot10^{4}$
4	0.4	4	0.9	9.338888889	1.692567126±0.03	$2.40143\cdot10^{11}\pm2.31\cdot10^{4}$
4	0.4	6	1.8	10.9	1.692567126±0.03	$1.76281\cdot10^{11}\pm1.69\cdot10^{4}$
4	0.4	2	0.5	4.25	1.692567126±0.03	$1.15953\cdot10^{12}\pm1.11\cdot10^{5}$
4	0.4	5	1.8	7.844444444	1.692567126±0.03	$3.40357\cdot10^{11}\pm3.27\cdot10^{4}$
4	-0.3	3	-0.5	-9.25	1.269425±0.03	$4.35165\cdot10^{11}\pm4.18\cdot10^{4}$
4	-0.3	6	-1.9	-10.42368421	1.269425±0.03	$3.42685\cdot10^{11}\pm3.29\cdot10^{4}$
2	-0.3	5	-2	-7.25	1.269425±0.03	$7.08372\cdot10^{11}\pm3.41\cdot10^{4}$
2	-0.3	4	-1.4	6.414285714	1.269425±0.03	$9.04983\cdot10^{11}\pm4.35\cdot10^{4}$
2	-0.2	4	-0.9	-9.338888889	0.846283563±0.02	$6.4038\cdot10^{11}\pm3.62\cdot10^{4}$
2	-0.2	6	-1.8	-10.9	0.846283563±0.02	$4.70084\cdot10^{11}\pm2.66\cdot10^{4}$

Nach dem Umpolen haben wir vergessen, 2 Messwerte bei 4kV und 0.4A zu messen.

$$B = \mu_0 \frac{8nI}{5\sqrt{5}R} \qquad \sigma_B = \sqrt{\left(\mu_0 \frac{8n\sigma_I}{5\sqrt{5}R}\right)^2}$$

$$r = \frac{x^2+y^2}{2y} \qquad \sigma_r = \sqrt{\left(\frac{x\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\left(1-\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)\sigma_x\right)^2}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{2U_0}{B^2r^2} \qquad \sigma_{\frac{e}{m}} = \sqrt{\left(\frac{2}{B^2r^2}\cdot\sigma_{U_0}\right)^2 + \left(\frac{4U_0}{B^3r^2}\cdot\sigma_B\right)^2 + \left(\frac{4U_0}{B^2r^3}\cdot\sigma_r\right)^2}$$

Ionen sind schwerer als Elektronen, also wäre $\frac{e}{m}$ kleiner, was zu einem größeren Bahnradius führen würde.

Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik lauten:

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{15}$$

$$\nabla\times\vec{E} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j} \tag{17}$$

$$\nabla\vec{B} = 0 \tag{18}$$

Für die Dynamik gilt:

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{19}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{20}$$

Aus (6) folgt, dass das E-Feld in der Elektrostatik ein konservatives Kraftfeld darstellt und man somit ein skalares Potential Φ findet, für das gilt:

$$E = -\nabla\Phi \tag{21}$$

Setzt man dies nun in 5 ein so erhält man

$$\nabla(-\nabla\Phi) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{22}$$

Für eine Ladunsgverteilung $\rho = 0$, also ohne Raumladung ergibt sich dann:

$$-\Delta\Phi = 0 \tag{23}$$

$$\Delta\Phi = 0 \tag{24}$$

Magnetische Linse

Mit der Auswertung kommen wir zu dem Ergebnis

$$\frac{e}{m} = 1,92558 \cdot 10^{11}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}} \pm 8,04925 \cdot 10^{8}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}(ext) \pm 2,15322 \cdot 10^{9}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}(int)$$

Das ist garnicht so weit vom Literaturwert entfernt: $1.76 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$