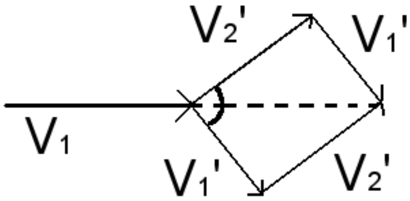
Stoßgesetze

Stöße

Ein Stoß ist eine zeitlich begrenzte Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen. Vor und nach einem Stoß unterscheiden sich Geschwindigkeit, Impuls und Energie der einzelnen Stoßpartner. Je nach Art der Energieübertragung unterscheidet man zwischen einem elastischen Stoß und einem inelastischen Stoß. Beim elastischen Stoß wird die kinetische Energie von vor dem Stoß in rein kinetische Energie umgewandelt. Beim inelastischen Stoß wird sie auch in innere Energie umgewandelt. Wir gehen bei diesem Versuch von einem elastischen Stoß aus. In Wirklichkeit gibt es diesen Stoß natürlich nicht, aufgrund diverser Faktoren, wie z. B. der Reibung.Der Stoßparameter ist der Abstand, mit dem ein anfliegendes Teilchen an einem ruhenden Ziel vorbeifliegen würde, wenn es zu keiner Wechselwirkung zwischen beiden käme. Der Stoßparameter wird meist mit b bezeichnet. Im Bild der klassischen Mechanik versteht man - ohne die Einschränkung, dass das Target ruht - unter b den senkrechten Abstand der Schwerpunkte beider Teilchen vor ihrem Stoß.

Grundlagen

Impulserhaltung Im Laborsystem für $v_2 = 0$:



Die Vektoren der Geschwindigkeit lassen sich zu einem Parallelogramm addieren, es gilt:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \tag{1}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{2}$$

Im Schwerpunktsystem:

$$m_1(u_1 + v_s) + m_2(u_2 + v_s) = m_1(u_1' + v_s) + m_2(u_2' + v_s) \tag{3}$$

Umrechnung Laborsystem - Schwerpunktsystem

$$\vec{v_1} = \vec{u_1} + \vec{v_s} \tag{4}$$

Schwerpunkt

Definition:

$$\frac{1}{M_{ges}} \sum_i m_i \cdot \vec{r_i} \tag{5}$$

Bei einem System von 2 oder mehr Massepunkten ist der Schwerpunkt der Punkt, auf den alle Kräfte angreifen, die das Massensystem verschieben würden. Im Schwerpunkt kann man die gesamte Masse des Körpers vereint denken. Die zeitliche Änderung des Schwerpunktes im Schwerpunktsystem ist trivialerweise 0:

$$\frac{d}{dt}(SP): \ \frac{1}{M_{ges}} \cdot \sum_i m_i \dot{r}_i = 0 \tag{6}$$

Der Energieerhaltungssatz, man geht von elastischen Stößen aus

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2' \tag{7}$$

Aus $p = m \cdot v$ und E= $\frac{m}{2} \cdot v^2$ folgt

$$\frac{{p_1}^2}{2m_1} + \frac{{p_2}^2}{2m_2} = \frac{{p_1'}^2}{2m_1} + \frac{p_2''^2}{2m_2} \tag{8}$$

$$\frac{{p_1}^2}{m_1} + \frac{{p_2}^2}{m_2} = \frac{{p_1'}^2}{m_1} + \frac{p_2''^2}{m_2} \tag{9}$$

Für den Fall, dass $v_2 = p_2 = 0$, also die Masse m_2 ruht und beide Massen konstant bleiben gilt:

$$\frac{{p_2}^2}{m_2} = \frac{{p_1'}^2}{m_1} + \frac{p_2''^2}{m_2} \tag{10}$$

$$\frac{(p_1' + p_2')^2}{m_1} = \frac{{p'}^2{}_1}{m_1} + \frac{{p'}^2{}_2}{m_2} \tag{11}$$

$$\frac{{m_1}^2 {v'}^2{}_1 + 2m_1 m_2 v_1' v_2' + {m_2}^2 \left|{v_2'}^2\right|}{m_1} = \frac{m_1 {v'}^2{}_1}{{m_1}^2} + \frac{{m_1}^2 \left|{v_2'}^2\right|}{m_2} \tag{12}$$

$$\frac{{m_1}^2 {v'}^2{}_1}{m_1} + \frac{2m_1 m_2 v_1' v_2'}{m_1} + \frac{{m_2}^2 \left|{v_2'}^2\right|}{m_1} = \frac{m_1 {v'}^2{}_1}{{m_1}^2} + \frac{{m_1}^2 \left|{v_2'}^2\right|}{m_2} \tag{13}$$

$$\frac{2m_1 m_2 v_1' v_2'}{m_1} + \frac{{m_2}^2 \left|{v_2'}^2\right|}{m_1} = \frac{{m_1}^2 \left|{v_2'}^2\right|}{m_2} \tag{14}$$

$$\frac{2m_1 m_2 \left|v_1'\right| \cdot \left|v_2'\right| \cdot \cos\ \alpha}{m_1} + \frac{{m_2}^2 \left|{v_2'}^2\right|}{m_1} = \frac{{m_1}^2 \left|{v_2'}^2\right|}{m_2} \tag{15}$$

$$2m_1 m_2 \left|v_1'\right| \cdot \left|v_2'\right| \cdot \cos\ \alpha + {m_2}^2 \left|{v_2'}^2\right| = m_1 m_2 \left|{v_2'}^2\right| \tag{16}$$

$$2m_1 m_2 \frac{\left|v_1'\right|}{\left|v_2'\right|} \cdot \cos\ \alpha + {m_2}^2 = m_1 m_2 \tag{17}$$

$$2\frac{\left|v_1'\right|}{\left|v_2'\right|} \cdot \cos\ \alpha + \frac{m_2}{m_1} = 1 \tag{18}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - 2\frac{\left|v_1'\right|}{\left|v_2'\right|} \cdot \cos\ \alpha \tag{19}$$

Da die Verhältnisse der Geschwindigkeiten denen der Strecke, die die Kugeln vom Stoßpunkt entfernt sind, entsprechen:

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - 2\frac{|s_1|}{|s_2|} \cdot \cos\ \alpha \tag{20}$$

Versuchsaufbau

Eine Stahlkugel durchläuft auf einer Schiene einen bestimmten Höhenunterschied und stößt mit horizontaler Geschwindigkeit auf eine zweite, ruhende Kugel (Stahl oder Glas). Beide Kugeln fallen vom Augenblick des Stoßes an frei und prallen auf eine waagrechte Fläche.
Auf die Aufprallfläche wird ein Blatt Papier (A4) geklemmt. Durch aufgelegtes Kohlepapier werden die Aufprallpunkte von stoßender und gestoßener Kugel festgehalten. Die Aufschlagpunkte bilden bei gleichen Massen der Kugeln einen Kreis, dies lässt sich durch das Ausnutzen des Impulserhaltung im Schwerpunktsystem zeigen:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0 \tag{21}$$

$$m_1\vec{u'_1} + m_2\vec{u'_2} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{m_1}{2} \cdot \ {u_1}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot \ {u_2}^2 = \frac{m_1}{2} \cdot \ {u'_1}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot \ {u'_2}^2 \tag{23}$$

$$(\frac{m_1}{2} \ - \ \frac{{m_2}^3}{m_2 1}) \cdot \ {u_1}^2 = (\frac{m_1}{2} \ - \ \frac{{m_2}^3}{{m_1}^2}) \cdot \ {u'_1}^2 \tag{24}$$

$$|\vec{u}_1| = \left|\vec{u'_1}\right| = const. \tag{25}$$

Auswertung

Gemessen wurde der Durchmesser der Stahlkugeln mit einer leicht kaputten Schieblehre, die Masse der Stahlkugeln wird über den gemessenen Radius bestimmt.Der Fehler der Schieblehre wird auf $\sigma_{schieblehre} = 0,5mm$ geschätzt. Die Winkel und Abstände, welche auf dem A4-Papier zu messen sind, wurden mit einem Geodreieck gemessen.Der Fehler des Winkels wird auf 1°=0,017 geschätzt. Der Fehler der Messung wird auf $\sigma_{Messung} = 3mm$ geschätzt, da das der maximale Abstand eines Messwertes zum Ausgleichskreis ist. Das Massenverhältnis wurde bestimmt durch:

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - 2\frac{|s_1|}{|s_2|} \cdot \cos \ \alpha \tag{26}$$

Messung von Stahlkugel (6mm) auf Stahlkugel (6mm)

Nr.	φ in °	s_1 in cm	s_2 in cm	$s_2-(r_1+r_2)$ in cm	$\frac{m_2}{m_1}$	$\sigma_{\frac{m_2}{m_1}}$
1	82	7,4	11,8	10,6	0,78	0,0410
2	79	5,8	12,7	11,5	0,79	0,0436
3	75	4,6	13,3	12,1	0,79	0,0461
4	63	3,9	13,7	12,5	0,71	0,0631
5	66	4,3	13,6	12,4	0,71	0,0639
6	68	5,3	13,1	11,9	0,65	0,0737
7	77	6,7	12,1	10,9	0,70	0,0589
8	78	7,5	11,7	10,5	0,68	0,0611
9	80	8,3	10,9	9,7	0,67	0,0569
10	79	8,8	10,9	9,7	0,62	0,0661
11	78	9,8	9,1	7,9	0,44	0,0799
12	57	3,6	13,8	12,6	0,68	0,0658
13	61	3,3	14,1	12,9	0,74	0,0560

$\sigma_{\frac{m_2}{m_1}}$ ist jeweis der Fehler, der sich für die Werte s_1, s_2 und φ nach der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung ergibt. Also ist $\frac{\tilde{m_2}}{m_1} = 0,69 \pm 0,06 \cdot \sqrt{13} = 0,69 \pm\ 0,216$
Die Messergebnisse sind halbwegs brauchbar. Allerdings wurden zwei Kugeln mit der selben Dichte und Größe verwendet, also sollte das Ergebnis 1 sein, deshalb muss es einen systematischen Fehler geben. Das ist darauf zurückzuführen, dass es sich in der Realität nicht um einen (idealen) elastischen Stoß handeln kann und noch andere Reibungseinflüsse im Spiel sind.

Messung von Stahlkugel (6mm) auf Glaskugel (8mm)

Nr.	s_1 in cm	s_2 in cm	$s_2-(r_1+r_2)$ in cm	φ in °	$\frac{m_2}{m_1}$	$\sigma_{\frac{m_2}{m_1}}$
1	9,7	7,3	5,9	80	0,43	0,0666
2	8,1	9,8	8,4	80	0,66	0,0556
3	9,1	8,6	7,2	83	0,69	0,0442
4	7,4	10,7	9,3	79	0,69	0,0556
5	6,7	11,6	10,2	78	0,73	0,0546
6	5,5	12,4	11	74	0,72	0,0584
7	4,5	12	10,6	73	0,75	0,0504
8	4	13,5	12,1	63	0,70	0,0647
9	4,3	13,7	12,3	62	0,67	0,0713
10	4,6	13,2	11,8	71	0,75	0,0567
11	5,6	12,7	11,3	75	0,74	0,0561
12	6,5	12	10,6	73	0,64	0,0728
13	7	11,5	10,1	74	0,62	0,0743
14	7,6	10,9	9,5	78	0,67	0,0620

Also ist $\frac{\tilde{m_2}}{m_1} = 0,68 \pm 0,06 \cdot \sqrt{14} = 0,68 \pm\ 0,22$ Das Ergebnis ist recht gut, der erste Wert stimmt nicht, was evtl daran liegen könnte, dass die Kugel an der Apparatur hängengeblieben ist.
Nach der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung gilt für den Messfehler $\sigma_{\frac{m_2}{m_1}}$:

$$\sigma_{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{(\frac{\partial \sigma_{\frac{m_2}{m_1}}}{\partial\ s_1}\,|\sigma_{s_{zuf}}|)^2 + \frac{\partial \sigma_{\frac{m_2}{m_1}}}{\partial\ s_2}\,|\sigma_{s_{zuf}}|)^2 + \frac{\partial \sigma_{\frac{m_2}{m_1}}}{\partial\ \varphi}\,|\sigma_{\varphi_{zuf}}|)^2} \tag{27}$$

$$\sigma_{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{(2\frac{\cos\varphi}{s_2} \cdot \sigma\ s_{zuf})^2 + (2s_1\frac{\cos\varphi}{{s_2}^2} \cdot \sigma\ s_{zuf})^2 + (-2s_1\frac{\sin\varphi}{s_2} \cdot\ \sigma\varphi_{zuf})^2} \tag{28}$$

Bestimmung der Massenverhältnisse durch die Radien der Kugeln

Für die Masse einer Kugel mit konstanter Dichte gilt:

$$m_{Kugel} = V_{Kugel} \cdot \rho = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot\ r^3 \tag{29}$$

Da 2 identische Kugeln verwendet wurden, ist $\frac{m_2}{m_1} = 1$. Wenn man aber von einem Messfehler von $\pm\ 0,5mm$ ausgeht, so ergibt sich für Metall:

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 \pm\ 0,212 \tag{30}$$

Da wir die Dichte der Glaskugel nicht kennen, fällt diese Messung weg

Bestimmung der Massenverhältnisse durch die Radien der Kreise

Für die Bestimmung des Massenverhältnisses durch den Radius gilt:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_2}{m_1} \tag{31}$$

Der Radius des Kreises der beiden Stahlkugeln ist $R_1 = R_2 = 5,7cm$, der Fehler ist der Punkt, der am weitesten von dem Ausgleichskreis weg ist und wird hier mit $\sigma_R = \pm\ 3mm$ beziffert. dadurch ergibt sich der Fehler:

$$\sigma_{S/S} = 0,07 \tag{32}$$

Also ist das Massenverhältnis der beiden Stahlkugeln:

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 \pm\ 0,07 \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

Die beiden Radien bei Stahl-Glas sind 4,9cm(Stahl, stoßend) und 6,2cm(Glas, gestoßen), also ergibt sich:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{4,9}{6,2} = 0,79 \pm\ 0,062 \tag{35}$$

Der Fehler ergibt sich beides mal über Gaussche Fehlerfortpflanzung